# Contributions à l'étude des processus gaussiens

Ivan Nourdin

Université de Paris VI - Pierre et Marie Curie

# Document de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : **Mathématiques**

Présenté par Ivan Nourdin

# Contributions à l'étude des processus gaussiens

Soutenue publiquement le 11 juin 2008 devant le jury composé de

Prof. Christian Houdré (Atlanta),
Prof. Michel Ledoux (Toulouse), *rapporteur*,
Prof. Mikhail Lifshits (Saint-Pétersbourg),
Prof. Marta Sanz-Solé (Barcelone), *rapportrice*,
Prof. Zhan Shi (Paris 6),
Prof. Pierre Vallois (Nancy), *président du jury*.

# Remerciements

Il m'est très agréable, avant d'aborder la partie purement mathématique de mon mémoire, de commencer par adresser quelques remerciements aux personnes qui, de près ou de loin, ont fait que j'ai pu mener à bien mes travaux de recherche dans d'excellentes conditions.

Tout d'abord, mes premiers iront aux rapporteurs, à savoir Yaozhong Hu, Michel Ledoux et Marta Sanz-Solé. Le fait qu'ils/elle aient accepté spontanément cette lourde tâche est pour moi une marque de reconnaissance, et j'en suis très honoré. Mes seconds iront aux autres membres du jury, à savoir Christian Houdré, Michel Lifshits, Zhan Shi et Pierre Vallois. À tous les sept, j'aimerais leur dire que je suis très heureux de pouvoir les associer à mon habilitation, notamment car leurs travaux respectifs ont souvent été une source d'inspiration pour développer mes propres axes de recherche.

Ensuite, j'aimerais remercier mes coauteurs : Jean-Christophe Breton, Sébastien Darses, Mihai Gradinaru, Laurent Mazliak, Andreas Neuenkirch, David Nualart, Giovanni Peccati, Andreas Rößler, Anthony Réveillac, Francesco Russo, Thomas Simon, Samy Tindel, Ciprian A. Tudor et Pierre Vallois. Pour moi, une collaboration est avant tout une aventure humaine, dont le but est de prendre du plaisir à développer ensemble de nouvelles idées mathématiques. Dans une telle aventure, on donne un peu de soi mais on apprend surtout beaucoup des autres. Donc, à tous, un grand merci pour ce que vous m'avez apporté !

Enfin, mes derniers remerciement iront à ma compagne et à ma fille. Car on ne peut faire ce qu'on aime que si l'entourage nous en donne les moyens. J'aimerais profiter de ces quelques lignes pour dire à Delphine qu'elle m'apporte énormément, et que je lui suis redevable de ce que je suis aujourd'hui. Pour finir, j'aimerais que Juliette sache combien sa bonne humeur et sa joie de vivre est importante pour moi au quotidien, et aussi combien son existence m'a permis de réaliser la chance que j'avais d'exercer le fabuleux métier d'enseignant-chercheur, car il me laisse le temps nécessaire pour la voir grandir, évoluer et profiter de tous les instants magiques qu'elle m'offre chaque jour.

# Introduction

Ce mémoire décrit les grandes lignes de mon activité de recherche depuis ma thèse, sans toutefois revenir sur ce qui était déjà traité dans celle-ci. Pour garder un ensemble cohérent, j'ai choisi de laisser certaines choses de côté. De plus, pour ne pas charger l'exposé, j'ai préféré (en général) ne rien dire sur les preuves des résultats énoncés. Pour cela, je renvoie le lecteur intéressé aux articles originaux, tous téléchargeables depuis ma page personnelle, et dont la liste exhaustive est donnée dans la section suivante.

Les thèmes que j'ai abordés sont tous (plus ou moins) reliés à l'objet central de ce mémoire qu'est le mouvement brownien fractionnaire. Mais, en fait, ce processus m'a le plus souvent servi de guide pour développer une théorie plus générale.

Détaillons maintenant le contenu de chaque chapitre :

- Le **chapitre 1** est principalement consacré au comportement asymptotique des variations à poids du *mouvement brownien fractionnaire*. Tout d'abord, après avoir motivé l'intérêt d'une telle étude et rappelé la situation "sans poids", nous verrons que dans certains cas (en fonction de la valeur de l'indice de Hurst $H$), la situation "avec poids" peut être très différente. Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où $H$ vaut $1/4$, et nous ferons le lien avec une conjecture récente par (Burdzy et) Swanson [61] concernant la possibilité d'écrire une formule d'Itô pour la solution de l'équation de la chaleur stochastique dirigée par un bruit blanc espace-temps. Enfin, nous traiterons le cas du *mouvement brownien itéré*, en faisant apparaître à la limite une version à poids du *mouvement brownien en scène aléaoire* introduit par Kesten et Spitzer [35] dans les années 70.

- Le **chapitre 2** présente des théorèmes limites abstraits (principalement valables pour une suite $(F_n)$ d'intégrales multiples par rapport à un processus gaussien isonormal $X$) sous des hypothèses concernant la dérivée de Malliavin de $F_n$. Nous y exposons notamment une nouvelle méthode donnant (de manière étonnament simple) une estimation de type Berry-Esséen quand la suite $(F_n)$ converge en loi vers une gaussienne. En particulier, cette méthode permet d'estimer la vitesse de convergence dans le classique théorème de Breuer et Major [7]. Notons que les outils présentés dans ce chapitre sont à la base des résultats obtenus dans le premier chapitre.

- Le **chapitre 3** est consacré à mes travaux relatifs à la théorie de l'intégration contre des "chemins rugueux" (*rough paths* en anglais). Tout d'abord, nous ferons un lien avec l'intégration par régularisation à la Russo-Vallois [57]. Ensuite, nous étudierons un problème de contrôle optimal. Enfin, nous exploiterons l'intégration algébrique récemment introduite par Gubinelli [28] pour calculer le développement asymptotique de la "loi" de la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un brownien fractionnaire d'une part, et pour étudier les équations différentielles *avec retard* dirigées par un chemin rugueux d'autre part.

- Enfin, dans le **chapitre 4**, nous définirons et étudierons un nouvel objet, appelé "dérivée stochastique". Puis, nous illustrerons certains phénomènes généraux en appliquant cette théorie au cas du mouvement brownien fractionnaire avec dérive.

# Liste de travaux

NOTA. La numérotation que j'ai utilisée respecte l'ordre chronologique, et pas l'ordre de parution. Par ailleurs, tous mes travaux sont téléchargeables à partir de ma page personnelle `http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/nourdin`

<u>**Articles parus ou à paraître**</u> (20)

- **[GN-1]** M. Gradinaru et I. Nourdin (2003) : *Approximation at first and second order of $m$-order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales.* Electronic Journal of Probability **8** (18), 1-26.
- **[GNRV-2]** M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo et P. Vallois (2005) : *$m$-order integrals and generalized Itô's formula ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index.* Annales de l'Institut Henri Poincaré (B), Probabilités et Statistiques, **41** (4), 781-806.
- **[N-3]** I. Nourdin (2005) : *Schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction höldérienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire.* Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I **340** (8), 611-614.
- **[GN-4]** M. Gradinaru and I. Nourdin (2007) : *Stochastic volatility : approximation and goodness-of-fit test.* Probability and Mathematical Statistics **28.1**, à paraître.
- **[GNT-5]** M. Gradinaru, I. Nourdin et S. Tindel (2005) : *Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation : the linear case.* Journal of Functional Analysis **228** (1), 114-143.
- **[NS-6]** I. Nourdin et T. Simon (2006) : *On the absolute continuity of Lévy processes with drift.* The Annals of Probability **34** (3), 1035-1051.
- **[NS-7]** I. Nourdin et T. Simon (2006) : *On the absolute continuity of one-dimensional SDEs driven by a fractional Brownian motion.* Statistic and Probability Letters **76** (9), 907-912.
- **[N-8]** I. Nourdin (2007) : *A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one.* Séminaire de Probabilités **XLI**, à paraître.
- **[NT-9]** I. Nourdin et C.A. Tudor (2006) : *Some linear fractional stochastic equations.* Stochastics **78** (2), 51-65.
- **[NN-10]** A. Neuenkirch et I. Nourdin (2007) : *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion.* Journal of Theoretical Probability **20** (4), 871-899.

**[NS-11]** I. Nourdin et T. Simon (2007) : *Correcting Newton-Cotes integrals by Lévy areas.* Bernoulli **13** (3), 695-711.

**[MN-12]** L. Mazliak et I. Nourdin (2008) : *Optimal control for rough differential equations.* Stochastic and Dynamics, à paraître (volume en l'honneur des 70 ans de Ludwig Arnold).

**[DN-13]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Stochastic derivatives for fractional diffusions.* The Annals of Probability **35** (5), 1998-2020.

**[NNRT-14]** A. Neuenkirch, I. Nourdin, A. Rößler et S. Tindel (2008) : *Trees and asymptotic developments for fractional stochastic differential equations.* Annales de l'Institut Henri Poincaré (B), Probabilités et Statistiques, à paraître.

**[DN-15]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Dynamical properties and characterization of gradient drift diffusions.* Electronic Communications in Probability **12** (electronic), 390-400.

**[DNP-16]** S. Darses, I. Nourdin et G. Peccati (2007) : *Differentiating $\sigma$-fields for Gaussian and shifted Gaussian processes.* Stochastics, en révision (mineure).

**[DN-18]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Asymptotic developments at any time for fractional SDEs of Hurst index $H > 1/2$.* Bernoulli, à paraître.

**[N-19]** I. Nourdin (2008) : *Asymptotic behavior of certain weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion.* The Annals of Probability, à paraître.

**[NP-23]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Weighted power variations of iterated Brownian motion.* Electronic Journal of Probability, à paraître.

**[NP-25]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Stein's method on Wiener chaos.* Probability Theory and Related Fields, à paraître.

**Prépublications** (10)

**[GN-17]** M. Gradinaru et I. Nourdin (2007) : *Weighted power variations of fractional Brownian motion and application to approximating schemes.*

**[NT-20]** I. Nourdin et S. Tindel (2007) : *Weak approximation of a fractional SDE.*

**[NP-21]** I. Nourdin et G. Peccati (2007) : *Non-central convergence of multiple integrals.*

**[NNT-22]** I. Nourdin, D. Nualart et C.A. Tudor (2007) : *Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion.*

**[NNT-24]** A. Neuenkirch, I. Nourdin et S. Tindel (2007) : *Delay equations driven by rough paths.*

**[NN-26]** I. Nourdin et D. Nualart (2008) : *Central limit theorems for multiple Skorohod integrals.*

**[NR-27]** I. Nourdin et A. Réveillac (2008) : *Asymptotic behavior of weighted quadratic variations of fractional Brownian motion : the critical case $H = 1/4$.*

**[NP-28]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Stein's method and exact Berry-Esséen asymptotics for functionals of Gaussian fields.*

**[NPR-29]** I. Nourdin, G. Peccati et A. Réveillac (2008) : *Multivariate normal approximation using Stein's method and Malliavin calculus.*

**[BN-30]** J.-C. Breton et I. Nourdin (2008) : *Error bounds on the non-normal approximation of Hermite power variations of fractional Brownian motion.*

# Table des matières


**1 Variations à poids des processus autosimilaires** **13**
1.1 Références en jeu . . . . . 13
1.2 Introduction . . . . . 14
1.3 Lien avec les schémas d'approximation . . . . . 14
1.4 Cas du brownien fractionnaire . . . . . 16
1.5 Cas des processus quartiques . . . . . 20
1.6 Quelques perspectives de recherche . . . . . 22

**2 Théorèmes limites à l'aide du calcul de Malliavin** **25**
2.1 Références en jeu . . . . . 25
2.2 La méthode des moments . . . . . 25
2.3 TCL pour une suite d'intégrales multiples . . . . . 27
2.4 Méthode de Stein et calcul de Malliavin . . . . . 29
2.5 Deux autres extensions du théorème de Nualart et Peccati . . . . . 33
2.6 Quelques perspectives de recherche . . . . . 35

**3 Équations différentielles et chemin rugueux** **37**
3.1 Références en jeu . . . . . 37
3.2 Introduction . . . . . 37
3.3 Intégration par régularisation *à la* Russo-Vallois . . . . . 38
3.4 Un problème de contrôle optimal . . . . . 40
3.5 Intégration algébrique *à la* Gubinelli . . . . . 42
3.6 Quelques perspectives de recherche . . . . . 45

**4 Dérivées stochastiques** **47**
4.1 Références en jeu . . . . . 47
4.2 Introduction . . . . . 47
4.3 Quelques définitions . . . . . 48
4.4 Dérivées stochastiques et changement de probabilité . . . . . 49
4.5 Développement asymptotique . . . . . 51
4.6 Quelques perspectives de recherche . . . . . 51

# Chapitre 1

# Variations à poids des processus autosimilaires et à accroissements stationnaires

## 1.1 Références en jeu

**[GNT-5]** M. Gradinaru, I. Nourdin et S. Tindel (2005) : *Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation : the linear case.* Journal of Functional Analysis **228** (1), 114-143.

**[N-8]** I. Nourdin (2007) : *A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one.* Séminaire de Probabilités **XLI**, à paraître.

**[NN-10]** A. Neuenkirch et I. Nourdin (2007) : *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion.* Journal of Theoretical Probability **20** (4), 871-899.

**[GN-17]** M. Gradinaru et I. Nourdin (2007) : *Weighted power variations of fractional Brownian motion and application to approximating schemes.* Preprint.

**[N-19]** I. Nourdin (2008) : *Asymptotic behavior of certain weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion.* The Annals of Probability, à paraître.

**[NNT-22]** I. Nourdin, D. Nualart et C.A. Tudor (2007) : *Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion.* Preprint.

**[NP-23]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Weighted power variations of iterated Brownian motion.* Electronic Journal of Probability, , à paraître.

**[NR-27]** I. Nourdin et A. Réveillac (2008) : *Asymptotic behavior of weighted quadratic variations of fractional Brownian motion : the critical case $H = 1/4$.* Preprint.

## 1.2 Introduction

Soit $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un processus autosimilaire d'indice $H \in (0,1)$, et à accroissements stationnaires. Le principal exemple que nous avons en tête est le *mouvement brownien fractionnaire*, c'est-à-dire le processus gaussien centré $B = (B_t)_{t\geq 0}$ de fonction de covariance

$$E(B_s B_t) = \frac{1}{2}\big(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\big).$$

Mais nous parlerons aussi du *mouvement brownien itéré*, c'est-à-dire du processus $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ défini par $Z_t = X(Y_t)$ pour $X$ et $Y$ deux mouvements browniens indépendants, et qui est autosimilaire d'indice $1/4$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement asymptotique des quantités (appelées *variations à poids*) du type

$$V_n^{(\kappa)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(Z_{k/n})(Z_{(k+1)/n} - Z_{k/n})^{\kappa} \tag{1.2.1}$$

pour $\kappa \geq 2$ entier et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière. Pour simplifier, dans la suite nous notons $\Delta Z_{k/n}$ au lieu de $Z_{(k+1)/n} - Z_{k/n}$. Avant de donner des résultats précis (dont certains plutôt inattendus) concernant $V_n^{(\kappa)}(f)$, disons un mot sur l'intérêt d'une telle étude.

## 1.3 Lien avec les schémas d'approximation

Supposons que $Z = B$ soit un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H > 1/2$, et notons $X$ l'unique solution (dans l'ensemble des processus à trajectoires höldériennes d'indice $\alpha$, pour un réel $\alpha$ donné strictement compris entre $1-H$ et $H$) de

$$X_t = x_0 + \int_0^t X_s dB_s, \quad t \in [0,1], \tag{1.3.2}$$

l'intégrale contre $B$ étant au sens de Young. L'équation (1.3.2) étant linéaire, elle se résoud explicitement en

$$X_t = x_0 \exp(B_t), \quad t \in [0,1].$$

Considérons le schéma d'Euler $\widehat{X}^{(n)}$ associé à (1.3.2). Toujours car l'équation (1.3.2) est très simple, on a une formule explicite pour $\widehat{X}_1^{(n)}$, à savoir

$$\widehat{X}_1^{(n)} = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} \big(1 + \Delta B_{k/n}\big).$$

En particulier, l'étude de la convergence de $\widehat{X}_1^{(n)}$ vers $X_1$ est aisée. En effet, en utilisant l'approximation $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ valable pour $x$ proche de 0, on en déduit que

$$\widehat{X}_1^{(n)} \approx x_0 \exp\left(B_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{k/n})^2\right) \tag{1.3.3}$$

(nous renvoyons à **[NN-10]** pour une étude rigoureuse sans "$\approx$"). Ainsi, la vitesse de convergence (et donc en particulier la convergence) de $\widehat{X}_1^{(n)}$ vers $X_1$ peut être déduite du résultat classique suivant, qui concerne la variation quadratique de $B$ : quand $n \to \infty$, on a

$$n^{2H-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta B_{k/n})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} 1. \tag{1.3.4}$$

En effet, on déduit facilement de (1.3.4) que

$$n^{2H-1}\big(\widehat{X}_1^{(n)} - X_1\big) \xrightarrow{\text{p.s.}} -\frac{X_1}{2} \neq 0.$$

Par contre, quand on considère la solution $X$ de

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \in [0,1], \tag{1.3.5}$$

pour une fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ générale, une formule du type (1.3.3) n'est plus si facile à obtenir. Toutefois, supposons que $\sigma$ soit suffisamment régulière et bornée et introduisons le flot $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de $\sigma$, à savoir l'unique solution de

$$\phi(x,y) = x + \int_0^y \sigma(\phi(x,z)) dz, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.3.6}$$

Remarquons alors que la solution $X$ de (1.3.5) est donnée par

$$X_t = \phi(x_0, B_t), \quad t \in [0,1].$$

De plus, le flot $\phi$ vérifie la propriété, dite de "semi-groupe", suivante :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \phi(\phi(x,y), z) = \phi(x, y+z).$$

En utilisant cette propriété, et après avoir effectué quelques développements limités (voir **[N-8]** et **[GN-17]** pour la méthode), on aboutit à l'analogue suivant de (1.3.3) :

$$\widehat{X}_1^{(n)} \approx \phi\left(x_0, B_1 - \frac{1}{2} V_n^{(2)}\big(\sigma' \circ \phi(x_0, \cdot)\big)\right). \tag{1.3.7}$$

Ainsi, l'étude de la (vitesse de) convergence de $\widehat{X}_1^{(n)}$ vers $X_1$ se ramène à l'étude du comportement asymptotique de $V_n^{(2)}(f)$ pour $f = \sigma' \circ \phi(x_0, \cdot)$.

Considérons maintenant une situation légèrement plus compliquée. Au lieu du schéma d'Euler $\widehat{X}^{(n)}$ associé à (1.3.5), introduisons le schéma de type Milstein $\widetilde{X}^{(n)}$ suivant :

$$\widetilde{X}_0^{(n)} = x_0 \text{ et } \widetilde{X}_{(k+1)/n}^{(n)} = \widetilde{X}_{k/n}^{(n)} + \sigma(\widetilde{X}_{k/n}^{(n)}) \Delta B_{k/n} + \frac{1}{2} \sigma\sigma'(\widetilde{X}_{k/n}^{(n)})(\Delta B_{k/n})^2, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{1.3.8}$$

Dans ce cas, on peut montrer (cf. **[GN-17]**) que l'analogue de (1.3.7) est de la forme

$$\widetilde{X}_1^{(n)} \approx \phi\left(x_0, B_1 + V_n^{(3)}(f)\right),$$

pour une certaine fonction $f$ dépendant (de manière explicite) de $\phi$ et $\sigma^{(j)}$ pour $j = 0, 1, 2$. Ainsi, c'est ici l'étude du comportement asymptotique de $V_n^{(3)}(f)$ qui joue un rôle clé.

En fait, plus généralement, on obtient une formule de type (1.3.7) avec $V_n^{(\kappa)}$ ($\kappa \geq 2$) au lieu de $V_n^{(2)}$ quand on considère des schémas de taille $\kappa - 1$ (étant entendu que le schéma d'Euler est de taille 1, que le schéma de Milstein (1.3.8) est de taille 2, etc.). Nous renvoyons à **[GN-17]** pour étude précise.

Avant de revenir à notre problème initial, c'est-à-dire l'étude du comportement asymptotique de $V_n^{(\kappa)}(f)$ pour tout entier $\kappa \geq 2$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, signalons que la vitesse de convergence du schéma d'Euler pour l'équation *avec dérive*

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds, \quad t \in [0,1],$$

est donnée (cf. **[NN-10]**), quand $H > 1/2$, par

$$n^{2H-1}\big(\widehat{X}_1^{(n)} - X_1\big) \xrightarrow{\text{p.s.}} -\frac{1}{2}\int_0^1 D_s X_1 \sigma'(X_s)ds, \tag{1.3.9}$$

où $D$ désigne la dérivée de Malliavin par rapport à $B$. Ce résultat est un peu surprenant quand on le compare à son analogue brownien ($H = 1/2$), obtenu par Kurtz et Protter [38] en 1991. On a en effet, dans ce cas,

$$\sqrt{n}\big(\widehat{X}_1^{(n)} - X_1\big) \xrightarrow{\text{Loi}} -\frac{1}{\sqrt{2}} Y_1 \int_0^1 \sigma\sigma'(X_s)Y_s^{-1}dW_s, \tag{1.3.10}$$

où $Y$ est solution d'une équation différentielle ordinaire aléatoire et où $W$ désigne un mouvement brownien standard, indépendant de $B$.

## 1.4 Cas du brownien fractionnaire

Revenons maintenant à l'étude des $V_n^{(\kappa)}(f)$ (avec $\kappa \geq 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière) quand $Z = B$ est un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H$ quelconque dans l'intervalle $(0, 1)$. Commençons par donner une brève description des résultats déjà connus. Tout d'abord, intéressons-nous au cas où $\kappa$ est pair. On a alors, si $f$ est continue :

$$n^{\kappa H-1}V_n^{(\kappa)}(f) \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu_\kappa \int_0^1 f(B_s)ds,$$

où $\mu_\kappa$ désigne le moment d'ordre $\kappa$ d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Cette convergence n'est pas très difficile à démontrer et s'apparente à un résultat de type "loi des grands nombres" (ou "théorème ergodique"). Quand $\kappa$ est impair, ou quand $\kappa$ est pair mais qu'on recentre $V_n^{(\kappa)}(f)$, le comportement asymptotique est plus difficile à obtenir. Commençons déjà par le cas où la fonction $f$ est identiquement égale à 1. Il est alors bien connu, depuis les travaux de Breuer et Major [7], Dobrushin et Major [19], Giraitis et Surgailis [27] ou encore Taqqu [62, 64], qu'on a, suivant la parité de $\kappa$ et la valeur de $H$ :

$$\kappa \text{ pair } \& \ H < 3/4 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{n}\big(n^{\kappa H-1}V_n^{(\kappa)}(1) - \mu_\kappa\big) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathscr{N}(0, \sigma_{H,\kappa}^2) \tag{1.4.11}$$

$$\kappa \text{ pair } \& \ H = 3/4 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\big(n^{\kappa H-1}V_n^{(\kappa)}(1) - \mu_\kappa\big) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathscr{N}(0, \sigma_{3/4,\kappa}^2)$$

$$\kappa \text{ pair } \& \ H > 3/4 \quad \Longrightarrow \quad n^H\big(n^{\kappa H-1}V_n^{(\kappa)}(1) - \mu_\kappa\big) \xrightarrow{\text{Loi}} Z_1 \tag{1.4.12}$$

$$\kappa \text{ impair } \& \ H \leq 1/2 \quad \Longrightarrow \quad n^{\kappa H-\frac{1}{2}}\, V_n^{(\kappa)}(1) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathscr{N}(0, \sigma_{H,\kappa}^2) \tag{1.4.13}$$

$$\kappa \text{ impair } \& \ H > 1/2 \quad \Longrightarrow \quad n^{(\kappa-1)H}\, V_n^{(\kappa)}(1) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathscr{N}(0, \sigma_{H,\kappa}^2).$$

Ici, $Z_1$ désigne la valeur au temps 1 du *processus de Rosenblatt.*

Revenons maintenant au cas général concernant $f$. Quand $H = 1/2$ (c'est-à-dire quand $B$ est un mouvement brownien standard), l'étude du comportement asymptotique de $V_n^{(\kappa)}(f)$ (pour $f$ continue) fait apparaître, à la limite, un nouveau mouvement brownien standard $W$ *indépendant* de $B$. Plus précisément, dans **[NP-23]** (voir aussi **[GN-4]** pour une deuxième démonstration utilisant le théorème de Knight asymptotique, et Jacod [33], où un résultat valable dans un cadre plus général est énoncé), il est prouvé qu'on a, lorsque $n \to \infty$ :

$$\kappa \text{ pair} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\big((\sqrt{n}\Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa\big) \xrightarrow{\text{Loi}} \sqrt{\mu_{2\kappa} - \mu_\kappa^2}\int_0^1 f(B_s)dW_s. \tag{1.4.14}$$

$$\kappa \text{ impair} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})(\sqrt{n}\Delta B_{k/n})^\kappa \xrightarrow{\text{Loi}} \int_0^1 f(B_s)\big(\sqrt{\mu_{2\kappa} - \mu_{\kappa+1}^2}dW_s + \mu_{\kappa+1}dB_s\big). \tag{1.4.15}$$

Retournons maintenant au cas fractionnaire (c'est-à-dire au cas où $H \neq 1/2$). Dans le récent travail de León et Ludeña [41] (voir aussi [13] pour des résultats du même type, concernant les $p$-variations d'intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien fractionnaire), il est montré, quand $f$ et ses dérivées vérifient une hypothèse de type "croissance au plus exponentielle", qu'on a :

$$\left.\begin{array}{l}\kappa \text{ pair } \& \\ H \in (1/2, 3/4)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\big((n^H\Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa\big) \xrightarrow{\text{Loi}} \sigma_{H,\kappa}\int_0^1 f(B_s)dW_s, \tag{1.4.16}$$

où, encore une fois, $W$ désigne un mouvement brownien standard indépendant de $B$. Autrement dit, (1.4.16) montre un comportement similaire à (1.4.14). La restriction $H < 3/4$ dans (1.4.16) s'explique par (1.4.11) et (1.4.12). Par contre, la restriction $H > 1/2$ est de nature purement technique, comme nous l'expliquons maintenant.

Dans [**NNT – 22**] et [**NR – 27**], nous résolvons complétement le problème du comportement asymptotique des variations à poids du mouvement brownien fractionnaire. Il se trouve que le bon cadre pour mener à bien cette étude est d'utiliser les polynômes d'Hermite. En effet, avec David Nualart et Ciprian Tudor d'une part et Anthony Réveillac d'autre part, nous avons montré le résultat suivant :

**Théorème 1.4.1.** *Soient $q$ un entier $\geq 2$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

$(\mathbf{H_q})$ $f \in \mathscr{C}^{2q}$ *et, pour tous* $p \in (0,\infty)$ *et* $0 \leq i \leq 2q$ : $\sup_{t\in[0,1]} E\left\{|f^{(i)}(B_t)|^p\right\} < \infty$.

*On pose*

$$S_n^{(q)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\, H_q\big(n^H \Delta B_{k/n}\big)$$

*où $H_q$ est le $q^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite défini par :*

$$H_q(x) = (-1)^q e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

1. *On suppose $0 < H < 1/2q$. Alors, quand $n \to \infty$,*

$$n^{qH-1}\, V_n^{(q)}(f) \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \frac{(-1)^q}{2^q} \int_0^1 f^{(q)}(B_s)ds.$$

2. *On suppose $H = 1/2q$. Alors, quand $n \to \infty$,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{(q)}(f) \xrightarrow{\text{Loi}} \frac{(-1)^q}{2^q} \int_0^1 f^{(q)}(B_s)ds + c_{1/2q,q} \int_0^1 f(B_s)dW_s,$$

   *où $W$ est un mouvement brownien standard indépendant de $B$, et $c_{1/2q,q}$ une constante (explicite) dépendant seulement de $q$.*

3. *On suppose $1/2q < H < 1 - 1/2q$. Alors, quand $n \to \infty$,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{(q)}(f) \xrightarrow{\text{Loi}} c_{H,q} \int_0^1 f(B_s)dW_s,$$

   *où $W$ est un mouvement brownien standard indépendant de $B$, et $c_{H,q}$ une constante (explicite) dépendant seulement de $q$ et $H$.*

4. *On suppose $H = 1 - 1/2q$. Alors, quand $n \to \infty$,*

$$\frac{1}{\sqrt{n \log n}} V_n^{(q)}(f) \xrightarrow{\text{Loi}} c_{1-1/2q,q} \int_0^1 f(B_s)dW_s,$$

   *où $W$ est un mouvement brownien standard indépendant de $B$, et $c_{1-1/2q,q}$ une constante (explicite) dépendant seulement de $q$.*

5. *On suppose $H > 1 - 1/2q$. Alors, quand $n \to \infty$,*

$$n^{q(1-H)-1}\, V_n^{(q)}(f) \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \int_0^1 f(B_s) dZ_s^{(q)},$$

*où $Z^{(q)}$ est le processus d'Hermite d'ordre $q$ construit à partir de $B$.*

Finalement, en décomposant le monôme $x^\kappa$ dans la base des polynômes d'Hermite, on obtient le résultat suivant, qui est à comparer avec (1.4.14), (1.4.15) et (1.4.16) :

**Corollaire 1.4.2.** *Soit $\kappa \geq 1$ un entier, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $(\mathbf{H}_\kappa)$. Alors, pour $n \to \infty$ :*

1. *Quand $H < 1/2$ et $\kappa$ est impair,*

$$n^{H-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})(n^H \Delta B_{k/n})^\kappa \xrightarrow{\mathrm{L}^2} -\frac{\mu_{\kappa+1}}{2} \int_0^1 f'(B_s) ds. \tag{1.4.17}$$

2. *Quand $H > 1/2$ et $\kappa$ est impair,*

$$n^{-H} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})(n^H \Delta B_{k/n})^\kappa \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \kappa\mu_{\kappa-1} \int_0^1 f(B_s) dB_s = \kappa\mu_{\kappa-1} \int_0^{B_1} f(x) dx.$$

3. *Quand $H < 1/4$ et $\kappa$ est pair,*

$$n^{2H-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\big[(n^H \Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa\big] \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \frac{1}{4}\binom{\kappa}{2}\mu_{\kappa-2} \int_0^1 f''(B_s) ds.$$

4. *Quand $H = 1/4$ et $\kappa$ est pair,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\big[(n^H \Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa\big] \xrightarrow{\mathrm{Loi}} \frac{1}{4}\binom{\kappa}{2}\mu_{\kappa-2} \int_0^1 f''(B_s) ds + \sigma_{1/4,\kappa} \int_0^1 f(B_s) dW_s, \tag{1.4.18}$$

*pour $\sigma_{1/4,\kappa}$ une constante explicite et $W$ un mouvement brownien standard indépendant de $B$.*

5. *Quand $1/4 < H < 3/4$ et $\kappa$ est pair,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n})\big[(n^H \Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa\big] \xrightarrow{\mathrm{Loi}} \sigma_{H,\kappa} \int_0^1 f(B_s) dW_s, \tag{1.4.19}$$

*pour $\sigma_{H,\kappa}$ une constante explicite et $W$ un mouvement brownien standard indépendant de $B$.*

6. *Quand $H = 3/4$ et $\kappa$ est pair,*

$$\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) \big[ (n^H \Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa \big] \xrightarrow{\text{Loi}} \sigma_{\frac{3}{4},\kappa} \int_0^1 f(B_s) dW_s,$$

*pour $\sigma_{3/4,\kappa}$ une constante explicite et $W$ un mouvement brownien standard indépendant de $B$.*

7. *Quand $H > 3/4$ et $\kappa$ est pair,*

$$n^{1-2H} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{k/n}) \big[ (n^H \Delta B_{k/n})^\kappa - \mu_\kappa \big] \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \mu_{\kappa-2} \binom{\kappa}{2} \int_0^1 f(B_s) dZ_s^{(2)},$$

*pour $Z^{(2)}$ le processus de Rosenblatt construit à partir de $B$.*

## 1.5 Cas du brownien fractionnaire d'indice 1/4, et d'autres processus quartiques

Dans le théorème 1.4.1, le cas $q = 2$ et $H = 1/4$ est très fortement relié à une conjecture récente par (Burdzy et) Swanson [61] concernant le comportement asymptotique des variations à poids pour la solution de l'équation de la chaleur stochastique dirigée par un bruit blanc espace-temps. Plus précisément, notons $u = u(t, x)$ la solution de l'équation

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx} + \dot{W}(t, x), \quad t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}, \tag{1.5.20}$$

avec condition initiale $u(0, x) = 0$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et considérons le processus $F = (F_t)_{t \geq 0}$ défini par $F_t = u(t, x)$ pour $t \geq 0$. Alors $F$ est gaussien, et a pour fonction de covariance

$$E(F_s F_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big( (t+s)^{\frac{1}{2}} - |t-s|^{\frac{1}{2}} \big).$$

Ainsi, $F$ est un processus gaussien autosimilaire d'indice 1/4 avec une fonction de covariance très proche de celle du brownien fractionnaire d'indice 1/4. Dans son article [61], Swanson conjecture que $F$ vérifie la règle de changement de variable suivante. Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière et $t \geq 0$,

$$\text{(Conjecture)} \qquad g(F_t) = g(0) + \int_0^t g'(F_s) dF_s + c \int_0^t g''(F_s) dW_s, \tag{1.5.21}$$

où $c$ est une certaine constante universelle (donnée explicitement), et où $W$ désigne un mouvement brownien standard *indépendant* de $F$. Comme l'explique Swanson dans son article [61], “la” manière naturelle de montrer (1.5.21) est d'analyser le comportement asymptotique de certaines variations à poids (signées) du type (1.2.1) pour $Z = F$. Dans [**NR − 27**], nous combinons cette idée avec nos récentes avancées sur l'étude des variations à poids du brownien fractionnaire. Cela nous permet de montrer la conjecture de Swanson quand, au lieu de $F$, nous considérons le cas d'un mouvement brownien fractionnaire d'indice $1/4$ (toutefois, la même approche permettrait de montrer la "vraie" conjecture, c'est-à-dire celle concernant la solution de l'équation de la chaleur stochastique). Notons enfin que, dans un travail en cours avec A. Réveillac et J. Swanson, nous sommes en train de faire une étude similaire dans le cas $H = 1/6$. Cette fois, nous montrons, pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière et $t \geq 0$,

$$g(B_t) = g(0) + \int_0^t g'(B_s)d^\circ B_s + \widetilde{c}\int_0^t g'''(B_s)dW_s,$$

avec, encore une fois, $W$ un mouvement brownien standard, indépendant de $B$ et $\widetilde{c}$ une constante universelle.

Profitons-en aussi pour signaler qu'il existe, pour $u$ donné par (1.5.20), d'autres formules de type Itô que celle donnée par (1.5.21) (mais elles sont moins "amusantes" car plus conventionnelles, c'est-à-dire sans le terme additif en loi). Par exemple, avec Samy Tindel et Mihai Gradinaru **[GNT-5]**, nous en avons obtenu une (ainsi qu'une formule de Tanaka) en prenant comme point de départ une représentation de type Volterra (contre le mouvement brownien cylindrique) pour $u(t,\cdot)$, et en adaptant à ce contexte infinidimensionnel l'article d'Alòs, Mazet et Nualart [1]. Il existe aussi d'autres approches possibles : voir par exemple Denis [17] (par processus de Dirichlet), Lanconelli [40] (par $S$-transform) ou encore Zambotti [67] (par régularisation).

Intéressons-nous maintenant au cas où, pour $Z$, on choisit le *mouvement brownien itéré*. Ce processus, introduit par Burdzy [8] et défini par $Z_t = X(Y_t)$ où $X$ et $Y$ sont deux mouvement browniens indépendants (le premier défini sur $\mathbb{R}$, l'autre sur $\mathbb{R}_+$), est lui aussi, en un certain sens, très proche du mouvement brownien fractionnaire d'indice $1/4$. Car, comme lui, il est à accroissements stationnaires et il est autosimilaire d'indice $1/4$. Pourtant, l'analyse du comportement asymptotique de ses variations à poids a mis en évidence des limites complétement différentes par rapport au cas fractionnaire (1.4.18). En effet, dans le travail **[NP-23]** en collaboration avec Giovanni Peccati, nous montrons, en reprenant l'approche de Khoshnevisan et Lewis [36], que la variation quadratique à poids (correctement renormalisée) du mouvement brownien itéré converge en loi vers une version à poids du célèbre *mouvement brownien en scène aléatoire* introduit par Kesten et Spitzer [35] dans les années 70. Plus précisément, nous obtenu cette fois comme limite

$$\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} f(X_z)L_1^z(Y)dB_z, \tag{1.5.22}$$

où $X$, $Y$ et $B$ sont trois mouvements browniens indépendants et où $L_1^z(Y)$ désigne le temps local passé par $Y$ au point $z$ jusqu'à l'instant final 1.

## 1.6 Quelques perspectives de recherche

(a) Dans **[N-19]**, nous montrons la convergence suivante : quand $H \in (0, 1/6)$ et $f \in \mathscr{C}_b^3$, on a, lorsque $n \to \infty$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[ f(B_{k/n})(n^H \Delta B_{k/n})^3 + \frac{3}{2} f'(B_{k/n}) n^{-H} \right] \xrightarrow{\mathrm{L}^2} -\frac{1}{8} \int_0^1 f'''(B_s) ds. \qquad (1.6.23)$$

L'intérêt est que (1.6.23) donne un terme de plus par rapport à (1.4.17) dans le développement asymptotique de $V_n^{(3)}(f)$. En général, ceci suggère que plus $H$ est proche de 0, plus on peut donner de termes dans le développement asymptotique de $V_n^{(\kappa)}(f)$ (sachant qu'on est évidemment obligé de s'arrêter dès qu'on tombe sur une convergence en loi). Dans mes prochains travaux, j'aimerais préciser ce point.

(b) Nous avons complétement compris le comportement asymptotique des variations à poids (1.2.1) quand $Z$ est un brownien fractionnaire d'indice $H$ quelconque dans l'intervalle $(0, 1)$. En particulier, dans le cas des puissances paires, nous avons vu apparaître trois régimes différents suivant la position de $H$ par rapport à $1/4$ et $3/4$. Est-ce un phénomène général ? Par exemple, si on choisit pour $Z$ un processus d'Hermite (qui est aussi autosimilaire et à accroissements stationnaires), observe-t-on la même chose ? D'autre part, que se passe-t-il quand on regarde des accroissements d'ordre supérieur, par exemple

$$Z_{(k+1)/n} - 2\, Z_{k/n} + Z_{(k-1)/n} \quad \text{au lieu de} \quad Z_{(k+1)/n} - Z_{k/n} ?$$

D'autres poids ?

(c) Dans le théorème 1.4.1, hormis pour les cas critiques, on peut observer une sorte de “symétrie” par rapport à $H = 1/2$ (qu'on ne pouvait pas observer dans le cas *sans poids*). En effet, quand on change $H$ en $1 - H$, on remarque que les vitesses sont correctes et que le type de convergence ($\mathrm{L}^2$ ou en loi) est le même. Seule la limite n'est pas la même (mais on pourrait imaginer une dualité entre la dérivée $q$-ième de $f$ et le processus d'Hermite d'ordre $q$). Peut-on l'expliquer ? Y'a-t-il un lien avec la formule suivante, démontrée récemment par Jost [34] :

$$B_t^H \overset{\text{Loi}}{=} \sqrt{\frac{2H}{\Gamma(2H)\Gamma(3-2H)}} \int_0^t (t-s)^{2H-1} dB_s^{1-H} ?$$

(évidemment, ici, $B^H$ – resp. $B^{1-H}$ – désigne un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H$ – resp. $1 - H$).

(d) Dans la section 1.3, nous avons étudié la vitesse de convergence de schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par le brownien fractionnaire. L'approche que nous avons suivie n'est en fait pas très classique. En effet, il est plus courant de chercher des vitesses dites *faibles*. Ceci veut dire que plutôt que de chercher la vitesse de convergence de $\widehat{X}_1^{(n)}$ vers $X_1$ comme nous l'avons fait (on parle alors de vitesse *forte*), on préfère en général évaluer l'erreur commise en remplaçant $E[\phi(\widehat{X}_1^{(n)})]$ par $E[\phi(X_1)]$, et ce pour une classe suffisamment large de fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans le cas brownien ($H = 1/2$), il est bien connu que si la vitesse de convergence forte est en général en $1/\sqrt{n}$ (voir (1.3.10)), l'erreur faible est plutôt en $1/n$. Par contre, quand $H > 1/2$, les erreurs forte et faible sont les mêmes, comme on le voit aisément en combinant (1.3.9) avec un argument de type convergence dominée[1]. Comme projet futur, j'aimerais mieux comprendre ce type de phénomène. Par exemple, intéressons-nous au "paradoxe" apparent suivant. Dans ce qui suit, $B$ désigne un mouvement brownien standard. En utilisant [50] et [54], on peut rapidement montrer que la limite en loi suivante a lieu : quand $\varepsilon \to 0$,

$$\Big((B_t)_{t\in[0,1]};\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big(\int_0^1 \frac{(B_{u+\varepsilon}-B_u)^2}{\varepsilon}du - 1\Big)\Big) \xrightarrow{\text{Loi}} \big((B_t)_{t\in[0,1]}\,;G\big), \tag{1.6.24}$$

où $G$ désigne une v.a. de loi $\mathscr{N}(0,2)$ indépendante de $B$. D'autre part, par continuité du produit de Wick par rapport aux opérations standard, on a

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 (B_{u+\varepsilon}-B_u)^{\diamond 2}du \xrightarrow{(\mathscr{S}^*)} \int_0^1 (B'_u)^{\diamond 2}du. \tag{1.6.25}$$

Ici, $(\mathscr{S}^*)$ désigne l'espace des distributions d'Hida, $\diamond$ le produit de Wick et $B'$ la dérivée (au sens d'Hida) de $B$. (Nous renvoyons à [29] pour la définition de toutes ces notions.) Or, il est élémentaire, en revenant à la définition du produit de Wick, de prouver que

$$(B_{u+\varepsilon}-B_u)^{\diamond 2} = (B_{u+\varepsilon}-B_u)^2 - \varepsilon.$$

Ainsi, les vitesses de convergence données dans (1.6.24) et (1.6.25) semblent contradictoires. Mais, en y regardant de plus près, il n'en est rien. En effet, la convergence (1.6.25) est grosso modo équivalente à dire que, pour "toute" v.a. $Z$ mesurable par rapport à $(B_t)_{t\in[0,1]}$, on a

$$E\left\{Z\,\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^1 \frac{(B_{u+\varepsilon}-B_u)^2}{\varepsilon}du - 1\Big)\right\} \longrightarrow E\left\{Z\,\int_0^1 (B'_u)^{\diamond 2}du\right\},$$

tandis qu'on déduit de (1.6.24) :

$$E\left\{Z\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big(\int_0^1 \frac{(B_{u+\varepsilon}-B_u)^2}{\varepsilon}du - 1\Big)\right\} \longrightarrow E\big(Z\,G\big) = E(Z)\,E(G) = 0.$$

Il n'y a donc pas de contradiction ! Au contraire, (1.6.25) donne la vitesse de convergence faible, tandis que (1.6.24) donne la vitesse forte. Avec Sébastien Darses, nous avons comme projet futur de mieux comprendre ce phénomène quand on travaille cette fois avec le mouvement brownien fractionnaire.

[1]Même si l'article [45] affirme et "prouve" le contraire...

# Chapitre 2

# Théorèmes limites à l'aide du calcul de Malliavin

## 2.1 Références en jeu

**[NN-10]** A. Neuenkirch et I. Nourdin (2007) : *Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion.* Journal of Theoretical Probability **20** (4), 871-899.

**[NP-21]** I. Nourdin et G. Peccati (2007) : *Non-central convergence of multiple integrals.* Preprint.

**[NNT-22]** I. Nourdin, D. Nualart et C.A. Tudor (2007) : *Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion.* Preprint.

**[NP-23]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Weighted power variations of iterated Brownian motion.* Electronic Journal of Probability, , à paraître.

**[NP-25]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Stein's method on Wiener chaos.* Probability Theory and Related Fields, à paraître.

**[NN-26]** I. Nourdin et D. Nualart (2008) : *Central limit theorems for multiple Skorohod integrals.* Preprint.

**[NP-28]** I. Nourdin et G. Peccati (2008) : *Stein's method and exact Berry-Esséen asymptotics for functionals of Gaussian fields.* Preprint.

**[NPR-29]** I. Nourdin, G. Peccati et A. Réveillac (2008) : *Multivariate normal approximation using Stein's method and Malliavin calculus.* Preprint.

**[BN-30]** J.-C. Breton et I. Nourdin (2008) : *Error bounds on the non-normal approximation of Hermite power variations of fractional Brownian motion.* Preprint.

## 2.2 La méthode des moments

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé quelques résultats classiques des années 70-80 par Breuer et Major [7], Dobrushin et Major [19], Giraitis et Surgailis [27] ou encore Taqqu [62, 64]. Revenons un instant sur la méthode utilisée à l'époque (et encore *malheureusement* – voir pourquoi après – très à la mode aujourd'hui, notamment chez les statisticiens) pour démontrer, par exemple, la convergence (1.4.11) quand $\kappa = 2$ (cas de la variation quadratique). Déjà, il faut comprendre pourquoi on renormalise par $1/\sqrt{n}$. Pour cela, il est classique et naturel de chercher le comportement asymptotique de la variance. Ici, quand $H < 3/4$ et en reprenant les notations du chapitre précédent, on a

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^H\Delta B_{k/n}\right)^2-1\right)^2\right] &= \sum_{k,\ell=0}^{n-1} E\left[\left(\left(n^H\Delta B_{k/n}\right)^2-1\right)\left(\left(n^H\Delta B_{\ell/n}\right)^2-1\right)\right]\\
&\overset{(*)}{=} 2n^{2H}\sum_{k,\ell=0}^{n-1}\left(E(\Delta B_{k/n}\,\Delta B_{\ell/n})\right)^2\\
&= 2\sum_{k,\ell=0}^{n-1}\left(|k-\ell+1|^{2H}+|k-\ell-1|^{2H}-2|k-\ell|^{2H}\right)^2\\
&\approx 2n\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left(|r+1|^{2H}+|r-1|^{2H}-2|r|^{2H}\right)^2 =: n\,\sigma_{2,H}^2.
\end{aligned}$$

Pour (*), on a utilisé la formule classique suivante (on rappelle que le 2nd polynôme d'Hermite est $H_2(x) = x^2 - 1$) : si $(U, V)$ est un processus gaussien normalisé[1] et si $p, q \in \mathbb{N}^*$ alors

$$E[H_p(U)H_q(V)] = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ p!\,E[UV]^p & \text{si } p = q \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

À l'aide de ce calcul de variance, on comprend donc pourquoi il faut renormaliser par $1/\sqrt{n}$, et comment on obtient la valeur de $\sigma_{H,2}$. Mais pourquoi la limite est-elle gaussienne ? La réponse historique consiste à utiliser la *méthode des moments*. Il s'agit alors de montrer, si on note

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(n^H\Delta B_{k/n}\right)^2-1\right), \tag{2.2.2}$$

que tous les moments de $F_n$ convergent vers ceux de la loi $\mathscr{N}(0,\sigma_{H,2}^2)$. Pour ce faire, on peut utiliser une formule plus générale que (2.2.1), prouvée par Taqqu [63], à savoir : si $(G_1, \ldots, G_p)$ est un vecteur gaussien normalisé et si on note $r_{ij} = E(G_iG_j)$, on a, pour tous $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}^*$,

$$E[H_{k_1}(G_1)\ldots H_{k_p}(G_p)] = \begin{cases} \frac{k_1!\ldots k_p!}{2^q\,q!}\sum_1 r_{i_1j_1}\ldots r_{i_qj_q} & \text{si } \sum_{i=1}^p k_i = 2q \text{ avec } 0\le k_i\le q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\sum_1$ est une somme sur les indices $i_1, j_1, \ldots, i_q, j_q$ qui satisfont

a) $i_1, j_1, \ldots, i_q, j_q \in \{1, 2, \ldots, p\}$

[1] c'est-à-dire si $E(U) = E(V) = 0$ et $E(U^2) = E(V^2) = 1$

b) $i_1 \neq j_1, \ldots, i_q \neq j_q$

c) il y a $k_1$ indices 1, …, $k_p$ indices $p$.

En spécialisant cette formule combinatoire au cas où $p = \kappa$ avec les $k_i$ tous égaux à 2, on peut, pour tout $\kappa \geq 3$, calculer la limite du moment d'ordre $\kappa$ de $F_n$ et conclure quant à la validité de (1.4.11).

Mais, en fait, on sait depuis peu que tout ceci est inutile ! En effet, on peut (devrait) maintenant plutôt utiliser un résultat fondamental découvert récemment par Nualart et Peccati [50]. Avant de l'énoncer et d'en proposer des généralisations, nous devons introduire quelques notations classiques concernant les processus gaussiens isonormaux, ce que nous faisons maintenant.

## 2.3 Théorème central limite pour une suite d'intégrales multiples

Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert réel séparable et, pour $q \geq 1$, notons $\mathfrak{H}^{\otimes q}$ (resp. $\mathfrak{H}^{\odot q}$) la $q^{\text{ième}}$ puissance tensorielle (resp. symétrique) de $\mathfrak{H}$. Dans la suite, nous considérons

$$X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\},$$

un processus centré gaussien isonormal sur $\mathfrak{H}$. Pour chaque $q \geq 1$, nous notons $I_q$ l'isométrie entre $\mathfrak{H}^{\odot q}$ (muni de la norme $\sqrt{q!}\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$) et le chaos de Wiener d'ordre $q$ de $X$. Rappelons que si $\mathfrak{H}$ est muni d'une mesure $\sigma$-finie sans atome, alors chaque variable aléaoire $I_q(h)$, pour $h \in \mathfrak{H}^{\odot q}$, a la forme d'une intégrale multiple d'ordre $q$ de Wiener-Itô. Pour $p, q \geq 1$, $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$, $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ et $r = 0, \ldots, p \wedge q$, nous notons par $f \otimes_r g \in \mathfrak{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ et $f \widetilde{\otimes}_r g \in \mathfrak{H}^{\odot(p+q-2r)}$, respectivement, la contraction (resp. symétrique) d'ordre $r$ de $f$ et $g$. Aussi, dans la suite, nous notons $D$ l'opérateur dérivée de Malliavin, tandis que $\delta$ est l'opérateur divergence associé. Pour des définitions et des propriétés plus précises, nous renvoyons au livre de Nualart [48].

Maintenant, nous pouvons énoncer le résultat fondamental suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Fixons un entier $q \geq 2$ et une suite $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{H}^{\odot q}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} q!\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = \lim_{n\to\infty} E\big[I_q(f_n)^2\big] = 1. \tag{2.3.3}$$

*Alors, les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *quand $n \to \infty$, la suite $\{I_q(f_n)\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$ ;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} E[I_q(f_n)^4] = 3$ ;

(iii) *pour tout $r = 1, \ldots, q-1$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n \otimes_r f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2(q-r)}} = 0$ ;*

(iv) $\lim_{n\to\infty} \|D[I_q(f_n)]\|^2_{\mathfrak{H}} = q$ *dans* $\mathrm{L}^2$.

L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) a été prouvée par Nualart et Peccati [50] en 2005 à l'aide du théorème de Dambis, Dubins et Schwarz. L'équivalence avec (iv) a ensuite été prouvée par Nualart et Ortiz-Latorre [49], en utilisant exclusivement les outils du calcul de Malliavin.

En particulier, le théorème 2.3.1 implique que la convergence en loi d'une suite d'intégrales multiples (par exemple, la suite des $F_n$ définis par (2.2.2)) vers une variable aléatoire gaussienne n'est obtenue qu'en analysant le comportement asymptotique des deuxième et quatrième moments. En tant que tel, le théorème 2.3.1 peut être vu comme une simplification drastique de la méthode des moments dont nous avons dit un mot plus haut.

Peu de temps après l'apparition du théorème 2.3.1, Peccati et Tudor [54] ont montré la version multidimensionnelle suivante :

**Théorème 2.3.2.** *Pour un entier $d \geq 2$ donné, fixons $d$ entiers $1 \leq q_1 \leq \ldots \leq q_d$. Considérons une suite de vecteurs aléatoires de la forme*

$$F_n = \big(I_{q_1}(f_n^1), \ldots, I_{q_d}(f_n^d)\big)$$

*où chaque $f_n^i$ appartient à $\mathfrak{H}^{\odot q_i}$. Pour chaque $1 \leq i, j \leq d$, supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} E\big[I_{q_j}(f_n^j) I_{q_i}(f_n^i)\big] = \delta_{ij},$$

*où $\delta_{ij}$ désigne le symbole de Kronecker. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *quand $n \to \infty$, la suite $\{F_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire gaussien standard $\mathscr{N}_d(0, I_d)$ ($I_d$ est la matrice identité $d \times d$),*

(ii) *pour chaque $j = 1, \ldots, d$, quand $n \to \infty$, la suite $\{I_{q_j}(f_n^j)\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire gaussienne standard $\mathscr{N}(0, 1)$.*

Une conséquence immédiate (mais souvent très importante pour les applications) du théorème 2.3.2 est qu'on a, en fait, automatiquement convergence "stable" dans le théorème 2.3.1 :

**Proposition 2.3.3.** *Soit $q$ un entier $\geq 2$, et soit $\{I_q(f_n)\}_{n\geq 1}$ une suite d'intégrales multiples vérifiant (2.3.3) d'une part et une des quatre conditions (i)-(iv) du théorème 2.3.1 d'autre part. Alors, pour tout $h \in \mathfrak{H}$, quand $n \to \infty$, le couple $\big(I_q(f_n), X(h)\big)$ converge en loi vers $\big(N, X(h)\big)$, où $N \sim \mathscr{N}(0, 1)$ est indépendante de $X(h)$.*

Comme exemples récents d'applications des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, on peut citer, en vrac, l'étude des : $p$-variations d'intégrales stochastiques fractionnaires (Corcuera *et al.* [13]), fonctionnelles quadratiques de processus gaussien bivariés (Deheuvels *et al.* [16]), temps local d'auto-intersection du mouvement brownien fractionnaire (Hu et Nualart [32]), schémas d'approximation pour les équations différentielles stochastiques scalaires **[NN-10]**, théorèmes limites haute-fréquence pour les champs aléatoires sur des espaces homogènes (Marinucci et Peccati [43, 44], et Peccati [51]), analyse par ondelettes sur la sphère (Baldi *et al.* [2]), estimation de l'indice d'autosimilarité (Tudor et Viens [65]), variations à poids du mouvement brownien fractionnaire **[NNT-22]**, variations à poids du mouvement brownien itéré **[NP-23]**, variations puissances pour des processus gaussiens à accroissements stationnaires (Barndorff-Nielsen *et al.* [3]), etc.

## 2.4 Méthode de Stein et calcul de Malliavin

### 2.4.1 Exemples d'énoncés obtenus

Avec Giovanni Peccati (voir [**NP-25]** et [**NP-28**]), nous nous sommes très récemment aperçus que la condition (iv) dans le Théorème 2.3.1 se combinait à merveille avec la méthode de Stein (voir plus bas) et permettait, par exemple, d'obtenir (d'une manière étonnament simple) des énoncés du type suivant :

**Théorème 2.4.1.** *Considérons une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de la forme $Z_n = I_2(f_n)$, avec $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot 2}$, et notons $\kappa_r^{(n)}$, $r \geq 1$, les cumulants de $Z_n$. Supposons que $\kappa_2^{(n)} \longrightarrow 1$ quand $n \to \infty$. Alors, quand $n \to \infty$, on a que $Z_n \overset{\text{Loi}}{\longrightarrow} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ si et seulement si $\kappa_4^{(n)} \longrightarrow 0$. Dans ce cas, on a même automatiquement mieux, à savoir :*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)| \leq \sqrt{\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2}.$$

*Si, de plus, on a, quand $n \to \infty$,*

$$\frac{\kappa_2^{(n)} - 1}{\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2} \longrightarrow 0, \quad \frac{\kappa_3^{(n)}}{\sqrt{\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2}} \longrightarrow \alpha \quad et \quad \frac{\kappa_8^{(n)}}{\left(\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2\right)^2} \longrightarrow 0$$

*alors*

$$\frac{P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)}{\sqrt{\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2}} \longrightarrow \frac{\alpha}{6\sqrt{2\pi}}(1 - z^2)e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{2.4.4}$$

*En particulier, si $\alpha \neq 0$, il existe $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ :*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)| \geq c\sqrt{\frac{\kappa_4^{(n)}}{6} + (\kappa_2^{(n)} - 1)^2}.$$

Concernant le classique théorème de Breuer et Major (1.4.11), on peut alors énoncer le résultat suivant qui, à notre connaissance, constitue le premier résultat associant une borne de type Berry-Esséen à (1.4.11) :

**Théorème 2.4.2.** *Fixons $q \geq 2$. Soit $B$ un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, \frac{2q-1}{2q})$, et soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :*

$$Z_n = \frac{1}{\sigma_H \sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_q\big(B_{k+1} - B_k\big),$$

*où $H_q$ désigne le $q^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite défini par*

$$H_q(x) = (-1)^q e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*et où*

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{2^q} \sum_{t\in\mathbb{Z}} (|t+1|^{2H} + |t-1|^{2H} - 2|t|^{2H})^q}.$$

*Alors, quand $n \to \infty$, $Z_n \overset{\text{Loi}}{\longrightarrow} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$. De plus, il existe une constante $c_{q,H}$ (dépendant seulement de $q$ et $H$) telle que, pour tout $n \geq 1$ :*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)| \quad \leq \quad c_{q,H} \times \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} & si\ H \in (0, \frac{1}{2}] \\ n^{H-1} & si\ H \in [\frac{1}{2}, \frac{2q-3}{2q-2}] \\ n^{qH-q+\frac{1}{2}} & si\ H \in [\frac{2q-3}{2q-2}, \frac{2q-1}{2q}) \end{cases}$$

Remarquons que lorsque $H = 1/2$, on retrouve évidemment la même borne qu'on obtiendrait en appliquant à la place le théorème de Berry-Esséen, dont nous rappelons l'énoncé :

**Théorème 2.4.3.** *(Berry-Esséen) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telles que $E(|X_1|^3) = \rho < +\infty$, $E(X_1) = 0$ et $E(X_1^2) = \sigma^2$. Alors $Z_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\text{Loi}}{\longrightarrow} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$ et, de plus :*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Signalons également, qu'en utilisant une technique complétement différente (i.e. pas du tout liée à la méthode de Stein), nous avons aussi traîté, avec Jean-Christophe Breton (voir [**BN** $-$ **30**]), le cas où $H > 1 - 1/2q$. Plus précisément, nous avons obtenu :

**Théorème 2.4.4.** *Fixons $q \geq 2$. Soit $B$ un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in (\frac{2q-1}{2q}, 1)$, et soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :*

$$Z_n = n^{q(1-H)-1} \sum_{k=0}^{n-1} H_q\big(B_{k+1} - B_k\big),$$

*où $H_q$ désigne le $q^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite défini par*

$$H_q(x) = (-1)^q e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Alors, quand $n \to \infty$, $Z_n \xrightarrow{\text{Loi}} Z \sim$ "Hermite random variable". De plus, il existe une constante $c_{q,H}$ (dépendant seulement de $q$ et $H$) telle que, pour tout $n \geq 1$ :*

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |P(Z_n \leq z) - P(Z \leq z)| \leq c_{q,H}\, n^{1-\frac{1}{2q}-H}.$$

Enfin, notons que **[NP-25]** et **[NP-28]** contiennent d'autres exemples d'applications de la méthode de Stein (décrite dans la section 2.4.3 juste après) que celle concernant la recherche de vitesses dans le théorème de Breuer et Major. Par exemple, dans **[NP-28]**, nous nous intéressons aussi aux fonctionnelles quadratiques dites de Toeplitz. Ou encore, dans **[NP-25]**, nous expliquons comment retrouver un résultat technique prouvé récemment par Chatterjee [11], et qui lui sert à associer des bornes à des théorèmes limites pour des matrices aléatoires (voir la section 2.4.3 juste après).

### 2.4.2 Description de la méthode de Stein "classique"

Sans rentrer dans les détails trop techniques, expliquons maintenant en quelques mots en quoi consiste la méthode de Stein. Cette théorie a été initiée par Charles Stein [58], et ensuite développée dans le livre [59]. Nous renvoyons aussi à [10], [12], [55] et [56] pour d'autres références et développements intéressants.

Soit $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$, et considérons une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'espérance $E(h(Z))$ soit bien définie. L'équation de Stein (d'inconnue $f$) associée à $h$ et $Z$ est donnée par

$$h(x) - E(h(Z)) = f'(x) - xf(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4.5}$$

On a alors le lemme fondamental suivant, dû à Stein [58] :

**Lemme 2.4.5.** *(i) Soit $W$ une variable aléatoire. Alors, $W \overset{\text{Loi}}{=} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ si et seulement si*

$$E[f'(W) - Wf(W)] = 0 \tag{2.4.6}$$

*pour tout fonction $f$ continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux vérifiant de plus $E|f'(Z)| < \infty$.*

*(ii) Si $h(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,z]}(x)$, $z \in \mathbb{R}$, alors (2.4.5) admet une solution $f$ qui est bornée par $\sqrt{2\pi}/4$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et telle que $\|f'\|_\infty \leq 1$.*

Observons que le point (ii) implique la borne suivante entre la loi de $Z$ et celle de n'importe quelle variable aléatoire $Y$ :

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |P(Y \leq z) - P(Z \leq z)| \leq \sup_{f \in \mathscr{F}} |E(f'(Y) - Yf(Y))| \tag{2.4.7}$$

où $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des fonctions bornées et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, telles que $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2\pi}/4$ et $\|f'\|_\infty \leq 1$.

L'inégalité (2.4.7) est le point de départ de la "méthode de Stein". Car, maintenant, le point crucial est comment estimer le membre de droite de (2.4.7) pour un choix donné de $Y$. Depuis la contribution initiale de Stein [58], une impressionnante panoplie de techniques ont été développées en fonction de la forme particulière imposée à $Y$. Ici, nous allons voir que lorsqu'on travaille avec des fonctionnelles de processus gaussiens, on peut estimer le membre de droite de (2.4.7) à l'aide de techniques issues du calcul de Malliavin.

### 2.4.3 Description de notre approche

On reprend les notations de la section 2.3. On commence par observer que, grâce à (2.4.6), on a $E[X(h)f(X(h))] = E[f'(X(h))]$ pour toute fonction $h \in \mathfrak{H}$ telle que $\|h\|_\mathfrak{H} = 1$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière. Notre observation clé est que cette dernière relation est en fait un cas très particulier de la célèbre formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin, à savoir : pour toute variable aléatoire $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ centrée, on a

$$E[Yf(Y)] = E[\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_\mathfrak{H} f'(Y)], \tag{2.4.8}$$

où l'opérateur linéaire $L^{-1}$, défini pour les variables centrées de $\mathrm{L}^2(X)$ et à valeurs dans $\mathbb{D}^{2,2}$, est l'inverse du générateur du semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck, noté $L$. Il suit que, pour tout $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$, l'expression apparaissant dans le membre de droite de (2.4.7) peut être évaluée en remplaçant tout d'abord $Yf(Y)$ par $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_\mathfrak{H} f'(Y)$ à l'intérieur de l'espérance, et ensuite en évaluant la distance (au sens $\mathrm{L}^2$) entre 1 et $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_\mathfrak{H}$. En général, on peut (doit) mener ce calcul en développant $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_\mathfrak{H}$ en chaos. En effet, quand $Y$ est de la forme $I_q(g)$ pour un certain entier $q \geq 2$ et une certaine fonction $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$, alors $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_\mathfrak{H} = q^{-1}\|DY\|^2_\mathfrak{H}$. En particulier, en utilisant cette dernière relation, on peut déduire des bornes pour (2.4.7) qui sont intimement reliées au point (iv) du théorème central limite 2.3.1. C'est cette approche qui permet de démontrer les majorations dans les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2, voir **[NP-25]** pour les détails. Par contre, pour obtenir (2.4.4), il faut revenir à (2.4.8) et faire une étude plus fine. Nous renvoyons cette fois à **[NP-28]** pour les détails.

Avant de terminer cette section, illustrons la puissance de notre méthode en montrant comment elle permet de retrouver rapidement le résultat suivant démontré très récemment par Chatterjee [11]. (Notons également qu'une autre démonstration du résultat de Chatterjee consiste à appliquer la formule d'Itô, voir par exemple [30, 31]. Je remercie Christian Houdré de m'avoir fait remarquer ce point.) Soit $Y = g(V_1, ..., V_n)$, où $V = (V_1, ..., V_n)$ est un vecteur gaussien $\mathscr{N}(0, I_n)$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction régulière telle que : (i) $g$ et ses dérivées ont une croissance sous-exponentielle à l'infini, (ii) $E(g(V)) = 0$, et (iii) $E(g(V)^2) = 1$. Alors, pour toute fonction lipschitzienne $f$, on a que $E[Yf(Y)] = E[S(V)f'(Y)]$, où, pour tout $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$S(v) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} E\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial v_i}(v)\frac{\partial g}{\partial v_i}(\sqrt{t}v + \sqrt{1-t}V)\right] dt. \tag{2.4.9}$$

Observons tout d'abord que, sans perte de généralité, on peut supposer que $V_i = X(h_i)$, où $X$ est un processus gaussien isonormal construit à partir d'un espace de Hilbert de la forme $\mathfrak{H} = \mathrm{L}^2(A, \mathscr{A}, \mu)$ et où $\{h_1, ..., h_n\}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{H}$. Vu (2.4.8), il s'agit de montrer que

$$S(V) = \langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}. \tag{2.4.10}$$

Puisque $Y = g(V_1, \ldots, V_n)$, on a $D_aY = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(V)h_i(a)$. D'autre part, puisque $Y$ est centrée et de carré intégrable, elle admet une décomposition en chaos de la forme $Y = \sum_{q\geq 1} I_q(\psi_q)$. Ceci implique en particulier que $D_aY = \sum_{q\geq 1} qI_{q-1}(\psi_q(a,\cdot))$. De plus $-L^{-1}Y = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q} I_q(\psi_q)$ d'où $-D_aL^{-1}Y = \sum_{q\geq 1} I_{q-1}(\psi_q(a,\cdot))$. Maintenant, soit $T_z$, $z \geq 0$, le semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck, dont l'action sur les variables aléatoires $F \in \mathrm{L}^2(X)$ est donnée par $T_z(F) = \sum_{q\geq 0} \mathrm{e}^{-qz} J_q(F)$. En particulier, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} T_{\ln(1/\sqrt{t})}(D_aY)dt &= \int_0^\infty e^{-z} T_z(D_aY)dz = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q} J_{q-1}(D_aY) \\ &= \sum_{q\geq 1} I_{q-1}(\psi_q(a,\cdot)) = -D_aL^{-1}Y. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la formule de Mehler (voir [48, formula (1.54)]), c'est-à-dire

$$T_z(f(V)) = E\big[f(e^{-z}v + \sqrt{1-e^{-2z}}V)\big]\big|_{v=V},$$

on obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} T_{\ln(1/\sqrt{t})}(D_aY)dt = \sum_{i=1}^n h_i(a) \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} E\big[\frac{\partial g}{\partial x_i}(\sqrt{t}\,v + \sqrt{1-t}\,V)\big]dt\ \big|_{v=V}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(V)h_i, \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} E\big[\frac{\partial g}{\partial x_i}(\sqrt{t}\,v + \sqrt{1-t}\,V)\big]dt\ \big|_{v=V}\ h_i \right\rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= S(V). \end{aligned}$$

## 2.5 Deux autres extensions du théorème de Nualart et Peccati

Depuis les travaux de Nualart et Peccati [50] puis Peccati et Tudor [54], et vu le nombre d'applications qu'ils ont engendrées (voir la liste non exhaustive donnée à la fin de la section 2.3), de nombreux efforts ont été produits pour trouver un énoncé similaire, mais dans le cas où la limite n'est plus forcément gaussienne. Dans cette direction, je vais maintenant détailler les résultats de deux articles réalisés conjointement l'un avec Giovanni Peccati **[NP-21]**, l'autre avec David Nualart **[NN-26]**.

(1) Dans **[NP-21]**, nous prouvons l'extension suivante du théorème 2.3.1 :

**Théorème 2.5.1.** *Fixons $\nu > 0$, et soit $R_\nu$ une variable aléatoire réelle ayant pour fonction caractéristique*

$$E\left(\mathrm{e}^{i\lambda R_\nu}\right) = \left(\frac{\mathrm{e}^{-i\lambda}}{\sqrt{1-2i\lambda}}\right)^\nu, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.5.11}$$

*Fixons un entier* pair $q \geq 2$, *et posons*

$$c_q := \frac{1}{(q/2)!\binom{q-1}{q/2-1}^2} = \frac{4}{(q/2)!\binom{q}{q/2}^2}.$$

*Alors, pour toute suite $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{H}^{\odot q}$ vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} q!\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = \lim_{n\to\infty} E\big[I_q(f_n)^2\big] = 2\nu,$$

*les six assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *quand $n \to \infty$, la suite $\{I_q(f_n)\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers $R_\nu$ ;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} E[I_q(f_n)^3] = E[R_\nu^3] = 8\nu$ *et* $\lim_{n\to\infty} E[I_q(f_n)^4] = E[R_\nu^4] = 48\nu + 12\nu^2$ *;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} E[I_q(f_n)^4] - 12E[I_q(f_n)^3] = 12\nu^2 - 48\nu$ *;*

(iv) $\lim_{n\to\infty} \|f_n \widetilde{\otimes}_{q/2} f_n - c_q \times f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} \|f_n \widetilde{\otimes}_r f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2(q-r)}} = 0$*, pour chaque $r = 1, ..., q-1$ tel que $r \neq q/2$ ;*

(v) $\lim_{n\to\infty} \|f_n \widetilde{\otimes}_{q/2} f_n - c_q \times f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}} = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} \|f_n \otimes_r f_n\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2(q-r)}} = 0$*, pour chaque $r = 1, ..., q-1$ tel que $r \neq q/2$ ;*

(vi) *quand $n \to \infty$, $\|D[I_q(f_n)]\|^2_{\mathfrak{H}} - 2qI_q(f_n) \longrightarrow 2n\nu$ dans $\mathrm{L}^2$.*

Observons que la variable aléatoire limite $R_\nu$ apparaissant dans la formule (2.5.11) est telle que $R_\nu \stackrel{\text{Loi}}{=} 2\,G_{\nu/2} - \nu$, où $G_{\nu/2}$ est de loi Gamma de paramètre $\nu/2$, c'est-à-dire que $G_{\nu/2}$ admet

$$g(x) = \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu/2)}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

pour densité, où $\Gamma$ est la fonction Gamma usuelle. Ainsi, quand $\nu \geq 1$ est un entier, $R_\nu$ est un $\chi^2$ centré avec $\nu$ degrés de liberté.

Signalons également que, dans **[NP-25]**, nous associons au théorème 2.5.1 une vitesse de convergence (voir aussi la section 2.4) en utilisant la méthode de Stein.

(2) Supposons maintenant que $(F_n)$ soit une suite de variables aléatoires de la forme $F_n = \delta^q(u_n)$, où les $u_n$ sont des variables *aléatoires* à valeurs dans $\mathfrak{H}$ et mesurables par rapport à $X$, et où $q \geq 1$ est un entier fixé. Peut-on mettre en évidence des conditions sur la dérivée de Malliavin de $F_n$ assurant que $F_n$ converge (disons stablement) vers un mélange de variables aléatoires gaussiennes ?

Avant de donner des éléments de réponses, faisons le lien avec deux travaux récents par Peccati et Taqqu [52, 53]. Dans ces deux articles, les auteurs proposent des conditions suffisantes assurant qu'une suite donnée d'intégrales multiples converge stablement vers une telle loi. Plus précisément, le problème suivant est étudié dans [52] : soit $Y \geq 0$ une variable aléatoire non constante admettant une représentation chaotique (finie) de la forme $Y = 1 + I_2(f_2) + \ldots + I_{2q-2}(f_{2q-2})$, soit $N \sim \mathscr{N}(0,1)$ une variable aléatoire indépendante de $Y$, et supposons que la suite $I_q(f_n)$ satisfasse des conditions adéquates de normalisation ; est-il possible d'associer à chaque $f_n$ et à chaque $r = 1, \ldots, q-1$ deux contractions généralisées, disons $f_n \otimes^*_{q-r} f_n$ et $f_n \otimes^{**}_{q-r} f_n$, de telle sorte que les deux relations

$$f_n \otimes^*_{q-r} f_n \longrightarrow_{n\to\infty} g_{2r} \quad \text{et} \quad f_n \otimes^{**}_{q-r} f_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0, \quad \forall r = 1, \ldots, q-1,$$

impliquent que $I_q(f_n)$ converge stablement vers $\sqrt{Y} \times N$ ? Le travail [52] donne des résultats dans cette direction, en construisant les deux noyaux $f_n \otimes^*_{q-r} f_n$ et $f_n \otimes^{**}_{q-r} f_n$ à l'aide de "résolutions de l'identité" et d'une formule de Clark-Ocone abstraite. Nous renvoyons aussi à [53] pour une preuve alternative de ces résultats à l'aide du "principe du conditionnement".

De mon côté, dans **[NN-26]** (collaboration avec David Nualart), je montre le résultat suivant :

**Théorème 2.5.2.** *Soit $F_n$ une suite de variables aléatoires de la forme $F_n = \delta^q(u_n)$, où les $u_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathfrak{H}$ et sont mesurables par rapport à $X$, et où $q \geq 1$ est un entier fixé. Supposons de plus que la suite $F_n$ est bornée dans $L^1$, et que :*

*(i) $\langle u_n, (DF_n)^{\otimes k_1} \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} (D^{q-1}F_n)^{\otimes k_{q-1}} \widetilde{\otimes} f_1 \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} f_r \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$ converge vers zéro dans $L^1$, pour tous entiers $r, k_1, \ldots, k_{q-1} \geq 0$ tels que $k_1 + 2k_2 + \ldots + (q-1)k_{q-1} + r = q$, et toutes fonctions $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{H}$ ;*

*(ii) $\langle u_n, D^q F_n \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$ converge dans $L^1$ vers une variable aléatoire positive $S^2$.*

*Alors $F_n$ converge stablement vers une variable aléatoire ayant pour fonction caractéristique $E\big(e^{-\frac{\lambda^2}{2}S^2}\big)$.*

Pour illustrer comment on peut utiliser le théorème 2.5.2 en pratique, dans **[NN-26]**, nous décrivons en détail deux exemples :
- On retrouve la preuve de l'implication (iv)→(i) dans le théorème 2.3.1.
- Nous donnons une nouvelle preuve de la convergence (1.4.19) quand $H \in (1/4, 1/2)$.

## 2.6 Quelques perspectives de recherche

(a) Dans **[NP-25]**, nous décrivons (entre autres) une méthode originale permettant d'associer des bornes de type Berry-Esséen à la convergence de certaines intégrales multiples. Nous pensons que cette méthode est très prometteuse. En particulier, nous comptons, dans un futur proche, montrer comment l'appliquer à certains (ou à tous les) résultats de convergence obtenus dans le premier chapitre. Nous avons aussi beaucoup d'autres exemples en tête, par exemple associer des bornes aux convergences en loi démontrées par Fox et Taqqu [24] dans les années 80.

(b) Le théorème 2.5.1 étend le théorème 2.3.1 au cas où la limite est une variable Gamma centrée de paramètre donné. Peut-on proposer des extensions du théorème 2.3.1 à d'autres lois que la loi Gamma ? (évidemment, la question est posée un peu naïvement ici ; on ne peut comprendre pourquoi on s'est "restreint" à la loi Gamma qu'en lisant la preuve du résultat principal de **[NP-21]** !)

(c) En combinant les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, on a un bon cadre pour démontrer des théorèmes fonctionnels concernant des suites d'intégrales multiples. Mais peut-on énoncer, en terme de contractions ou de dérivées de Malliavin, des conditions suffisantes assurant directement un tel résultat ? (un peu comme le théorème de Donsker évite d'utiliser la version multidimensionnelle du théorème central limite classique pour démontrer des résultats fonctionnels)

# Chapitre 3

# Équations différentielles et chemin rugueux

## 3.1 Références en jeu

**[N-8]** I. Nourdin (2007) : *A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one.* Séminaire de Probabilités **XLI**, à paraître.

**[NS-11]** I. Nourdin et T. Simon (2007) : *Correcting Newton-Cotes integrals by Lévy areas.* Bernoulli **13** (3), 695-711.

**[MN-12]** L. Mazliak et I. Nourdin (2008) : *Optimal control for rough differential equations.* Stochastic and Dynamics, à paraître (volume en l'honneur des 70 ans de Ludwig Arnold).

**[NNRT-14]** A. Neuenkirch, I. Nourdin, A. Rößler et S. Tindel (2008) : *Trees and asymptotic developments for fractional stochastic differential equations.* Annales de l'Institut Henri Poincaré (B), Probabilités et Statistiques, à paraître.

**[DN-18]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Asymptotic developments at any time for fractional SDEs of Hurst index $H > 1/2$.* Bernoulli, à paraître.

**[NT-20]** I. Nourdin et S. Tindel (2007) : *Weak approximation of a fractional SDE.* Preprint.

**[NNT-24]** A. Neuenkirch, I. Nourdin et S. Tindel (2007) : *Delay equations driven by rough paths.* Preprint.

## 3.2 Introduction

L'étude des équations différentielles dirigées par un mouvement brownien fractionnaire a connu un réel essor ces dernières années, sous deux effets conjugués. D'une part la théorie des trajectoires rugueuses, ainsi que certaines de ses variantes, ont permis d'avancer considérablement dans la compréhension de ces objets mathématiques complexes, en faisant appel à des méthodes sophistiquées d'intégration et à des notions avancées d'analyse

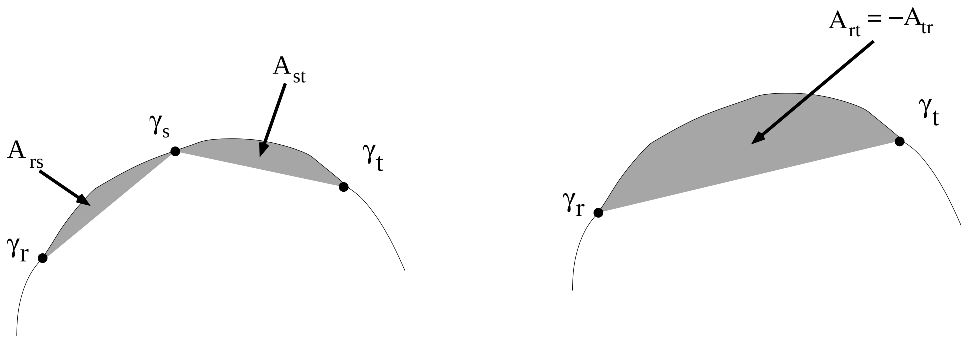


FIG. 3.1 – Relation algébrique satisfaite par l'aire de Lévy associée à $\Gamma$

stochastique (on pourra consulter à ce propos les articles de Lyons [42], Nualart [47] ou encore Russo-Vallois [57]). D'autre part, les demandes concernant les équations différentielles fractionnaires (EDf) provenant du monde de l'ingénierie affluent depuis peu à un rythme soutenu, ainsi que l'attestent par exemple [5, 6] (où la quantité de pluie est modélisée par une EDf), [37] (où la dite sous-diffusion d'une molécule de protéine est modélisée avec succès par une EDf de type Langevin), ou encore [18] (où on modélise par une EDf le bruit $1/f$ dans les circuits électroniques).

Dans la suite, quand $k, d \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in (0, k)$ et $V$ est un espace de Banach, on note $\mathcal{C}_k^\gamma([a,b]; V)$ l'ensemble des fonctions $g : [a,b]^k \to V$ höldériennes d'indice $\gamma$ et vérifiant $g_{t_1 \ldots t_k} = 0$ dès que $t_i = t_{i+1}$ pour au moins un $i$ (cette dernière condition est évidemment immatérielle quand $k = 1$).

## 3.3 Intégration par régularisation *à la* Russo-Vallois

Mon premier intérêt pour la théorie des trajectoires rugueuses s'est manifesté quand, avec Thomas Simon **[NS-11]**, nous avons cherché à faire un lien avec la théorie de l'intégration par régularisation *à la* Russo-Vallois [57]. Pour simplifier l'exposition de ce travail, je ne vais considérer ici que le cas où $H \in (1/3, 1)$, bien que notre étude soit en fait valable pour tout $H \in (0, 1)$. Tout d'abord, nous avons introduit la définition suivante :

**Définition 3.3.1.** *Soient $x, g \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,1]; \mathbb{R})$ avec $\gamma > 1/3$. Pour tout $t \in [0,1]$, on note $\Gamma_t$ le couple $(x_t, g_t)$. On dit que $A \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1]; \mathbb{R})$ est une* aire de Lévy associée à *$(x, g)$ si, pour tous $r, s, t \in [0,1]$, on a*

$$A_{rs} + A_{st} + A_{tr} = -\text{aire}(T_{rst}), \tag{3.3.1}$$

*où $T_{rst}$ désigne le triangle (orienté) de sommets $\Gamma_r$, $\Gamma_s$ et $\Gamma_t$.*

Cette définition est motivée par l'observation suivante. Si $x$ et $g$ sont régulières (disons de classe $\mathscr{C}^1$), alors l'aire du domaine $D_{st}$ délimité par la trajectoire $\Gamma([s,t])$ et la corde affine de $\Gamma_s$ à $\Gamma_t$ est bien définie et vérifie (3.3.1) avec $\gamma = 1$ (*cf.* figure 3.1). On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2.** *Soient $x, g \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$ avec $\gamma > 1/3$, et $A \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R})$ une aire de Lévy associée à $\Gamma = (x,g)$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, définissons*

$$I_\varepsilon(f) = \int_0^1 \frac{f(x_u) + f(x_{u+\varepsilon})}{2} \times \frac{g_{u+\varepsilon} - g_u}{\varepsilon} du + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 f'(x_u) A_{u,u+\varepsilon} du.$$

*Alors la famille $\{I_\varepsilon(f),\, \varepsilon > 0\}$ converge quand $\varepsilon \downarrow 0$. Sa limite est notée $\int_0^1 f(x_u) d^{\circ,A} g_u$ et s'appelle* l'intégrale de $f(x)$ par rapport à $g$ corrigée par $A$.

L'intérêt du Théorème 3.3.2 est qu'on a maintenant un bon cadre pour étudier les équations différentielles (unidimensionnelles) de la forme

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) dg_s + \int_0^t b(x_s) ds, \quad t \in [0,1], \tag{3.3.2}$$

où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (régulières) et $g \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$ (avec $\gamma > 1/3$) sont données. En effet, on peut poser la :

**Définition 3.3.3.** *Une solution de (3.3.2) est un couple $(x, A)$ vérifiant :*

i) $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$,

ii) $A \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R})$ *est une aire de Lévy associée à* $\Gamma = (x,g)$,

iii) *Pour tout $t \in [0,1]$, on a $x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) d^{\circ,A} g_s + \int_0^t b(x_s) ds$.*

Dans cette définition, on voit que le sens donné à $\int_0^t \sigma(x_s) dg_s$ est contenu dans le concept de solution. Par rapport à **[N-8]** où j'avais été obligé d'imposer *a priori* une forme particulière à la solution $x$ pour pouvoir résoudre (3.3.2), nous pouvons ici résoudre classiquement (3.3.2) par un théorème de point fixe. Nous obtenons :

**Théorème 3.3.4.** *Fixons $\gamma > 1/3$ et $g$ une fonction de $\mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$. Considérons aussi $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ (resp. lipschitzienne). Supposons enfin que $\sigma$, $\sigma'$, $\sigma''$ et $b$ soient bornées. Alors l'équation (3.3.2) admet une unique solution $(x, A)$ au sens de la définition 3.3.3.*

De plus, nous pouvons démontrer que la solution donnée par le théorème précédent coïncide avec la solution donnée par la méthode de Doss [20] et Sussmann [60] :

**Proposition 3.3.5.** *Sous les hypothèses du théorème (3.3.4), la solution $(x, A)$ se représente de la manière suivante. La fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ est donnée par $x_t = \phi(a_t, g_t)$ où $\phi$ est le flot défini par (1.3.6) et où $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire*

$$a_t = x_0 + \int_0^t \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial a}(a_s, g_s) \right\}^{-1} b \circ \phi(a_s, g_s) ds, \quad t \in [0,1].$$

*La fonction $A$ est donnée, pour $0 \le s < t \le 1$ :*

$$A_{st} = \Phi(a_t, g_t) - \Phi(a_s, g_s) - \int_s^t \frac{\partial \Phi}{\partial a}(a_u, g_u) a'_u du - \frac{\phi(a_t, g_t) + \phi(a_s, g_s)}{2}(g_t - g_s),$$

*où $\Phi$ est telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial g}(a, g) = \phi(a, g)$.*

## 3.4 Un problème de contrôle optimal

Avec Laurent Mazliak **[MN-12]**, je me suis ensuite intéressé à un problème de contrôle optimal associé à l'équation

$$x_t^u = x_0^u + \int_0^t \sigma(s, u_s, x_s^u) dg_s + \int_0^t b(s, u_s, x_s^u) ds, \quad t \in [0,1], \tag{3.4.3}$$

ou, encore une fois, la fonction $g$ est seulement supposée appartenir à $\mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$ (mais cette fois, on suppose que $\gamma > 1/2$, c'est-à-dire que notre intégrale est de type Young). De son côté, le contrôle $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ est supposé appartenir à un ensemble $\mathcal{U}$ de contrôles dits *admissibles*.

Voici le problème de contrôle que nous avons considéré :

**Problème** : "Une fonction de coût $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ étant donnée, est-il possible de montrer l'existence de $u^* \in \mathcal{U}$ réalisant $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$ ?" (3.4.4)

Bien entendu, plus l'ensemble $\mathcal{U}$ contient de contrôles admissibles, plus il est difficile de répondre à cette question (par exemple, si l'ensemble $\mathcal{U}$ est fini, la réponse est évidemment positive !).

Pour résoudre (3.4.4), il est classique de chercher des conditions assurant que $\mathcal{U}$ est compact pour une certaine topologie sous laquelle $J$ est continue. Ici, puisque l'obtention d'une solution à (3.4.3) requiert de la régularité sur les coefficients, nous avons séparé notre étude en deux cas :

(1) Si le coefficient de $dg_t$ *ne dépend pas* du contrôle $u$, i.e.

$$x_t^u = x_0^u + \int_0^t \sigma(s, x_s^u) dg_s + \int_0^t b(s, u_s, x_s^u) ds, \quad t \in [0,1], \tag{3.4.5}$$

on peut étendre littéralement la situation déterministe, c'est-à-dire prouver un théorème d'existence pour une très large classe $\mathcal{U}$ de contrôles, à savoir la classe des contrôles dit *relaxés*. On utilise pour cela la classique *méthode de compactification*, qui a été développée dans les années 60 pour les problèmes de contrôles déterministes (voir [26, 66]) puis dans les années 70 pour les problèmes de contrôles stochastiques (voir [23, 21]). Plus précisément, fixons un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{R}$ et définissons :

**Définition 3.4.1.** *Un contrôle* relaxé *est une mesure $q$ sur $U \times [0,1]$ telle que la projection de $q$ sur $[0,1]$ est la mesure de Lebesgue. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des contrôles relaxés.*

Un contrôle relaxé peut être décomposé à l'aide d'un noyau mesurable : $q(da, dt) = q_t(da)dt$ où $t \mapsto q_t$ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^+$ dans l'espace des mesures de probabilités sur $U$. Il y a une injection naturelle de l'espace des contrôles (non relaxés) dans l'espace des contrôles relaxés : $q$ est un contrôle non-relaxé si, à chaque temps $t$, $q_t$ est concentrée en un unique point $u_t$. En d'autres termes, on assimile le contrôle $(u_t)_{t\in[0,1]}$ avec le contrôle relaxé $\delta_{u_t} dt$ où $\delta_x$ désigne la mesure de Dirac en $x$. On note $\mathcal{V}'$ l'espace des contrôles non relaxés. Le résultat suivant est fondamental pour la suite :

**Proposition 3.4.2.** *On suppose que $U$ est compact. Alors l'espace $\mathcal{V}$ des contrôles relaxés, muni de la topologie vague, est compact.*

Quand $q \in \mathcal{V}$ est un contrôle relaxé, l'analogue de l'équation (3.4.5) devient

$$x_t^q = x_0^q + \int_0^t \sigma(r, x_r^q) dg_r + \int_0^t \int_U b(r, x_r^q, a) q_r(da) dr. \tag{3.4.6}$$

Sous des hypothèses classiques sur $\sigma$ et $b$, à savoir que $\sigma$ est $\mathscr{C}^{1,2}$ avec des dérivées bornées et que $b$ est bornée et globallement lipschitzienne (uniformément en $x \in \mathbb{R}$ par rapport à $(t, u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$), on montre l'existence d'une unique solution continue $x^q$ et, de plus, que $q \mapsto x^q$ est continue de $\mathcal{V}$ dans $\mathscr{C}^0$.

Considérons maintenant un coût intégral de la forme suivante : pour un contrôle $u_t$ prenant ses valeurs dans $U$ (supposé compact), on pose

$$J(u) = \int_0^1 \ell(r, x_r^u, u_r) dr$$

où $\ell$ est une fonction bornée et continue par rapport à $(r, x, u)$. Notons que la définition de $J$ peut immédiatement être étendue au cas des contrôles relaxés : si $q$ est un contrôle relaxé de $\mathcal{V}$,

$$J(q) = \int_0^1 \int_U \ell(r, x_r^q, a) q_r(da) dr.$$

En utilisant la propriété de continuité de $x^q$ par rapport à $q$ dans (3.4.6) et la Proposition 3.4.2, on aboutit au résultat suivant :

**Proposition 3.4.3.** *Sous les hypothèses précédentes sur $\sigma$ et $b$, il existe $q^* \in \mathcal{V}$ tel que*

$$J(q^*) = \inf_{q \in \mathcal{V}} J(q).$$

Pour finir, remarquons que nous n'avons pas changé notre problème initial en considérant des contrôles relaxés. En effet, on a :

**Proposition 3.4.4.** *Sous les hypothèses précédentes sur $\sigma$ et $b$, on a*

$$\inf_{q \in \mathcal{V}} J(q) = \inf_{q \in \mathcal{V}'} J(q).$$

(2) Comme nous l'avons déjà souligné, le cas où $u$ apparaît dans le coefficient de $dg_t$ est beaucoup plus compliqué. La raison est que nous ne sommes pas capables, à l'heure actuelle, d'intégrer par rapport à $g$ des fonctions moins régulières qu'höldériennes (par exemple, seulement mesurables bornées). C'est pourquoi nous avons été obligés de restreindre fortement notre ensemble de contrôles admissibles, et de ne considérer que des contrôles $u$ ayant une régularité höldérienne. La résolution du problème (3.4.4) se fait alors principalement en utilisant un résultat de compacité dans les espaces höldériens dû à Lamperti [39]. Nous renvoyons à **[MN-12]** pour les détails techniques.

## 3.5 Intégration algébrique *à la* Gubinelli

Enfin, avec Andreas Neuenkirch et Samy Tindel, nous avons récemment démarré un projet plus ambitieux. En effet, nous avons entrepris d'analyser et d'exploiter une simplification de la théorie des trajectoires rugueuses due à Massimiliano Gubinelli [28] (appelée intégration algébrique par la suite), afin d'étudier les propriétés des processus définis comme solutions d'équations différentielles dirigées par un mouvement brownien fractionnaire (EDf dans la suite). Un premier travail dans cette direction est l'article **[NNRT-14]**. Nous y utilisons ce formalisme simplifié, ainsi qu'un codage des dérivations par des arbres, pour étudier un développement asymptotique de la loi de tels processus. Un deuxième est **[NT-20]** où nous montrons un résultat d'approximation-diffusion pour une EDf quand $H > 1/3$. Un troisième est **[NNT-24]** où nous étudions l'existence et l'unicité dans les équations différentielles avec retard.

### 3.5.1 Approche heuristique

Tout d'abord, tentons d'expliquer la démarche (différente de celle que j'ai utilisée avec Thomas Simon dans **[NS-11]**, voir plus haut) que nous avons suivie dans **[NNRT-14]** pour résoudre une EDf, quand le paramètre de Hurst est compris entre $1/3$ et $1/2$. Bien que notre approche soit valable en toute dimension, on se place pour l'instant en dimension un, ceci afin d'en simplifier l'exposition (mais insistons sur le fait que ce n'est, contrairement à **[NS-11]**, qu'une hypothèse simplificatrice). Considérons l'équation

$$x_t = a + \int_0^t \sigma(x_s) dg_s, \quad t \in [0,1],$$

où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ et bornée ainsi que sa dérivée, et où $g$ appartient à $\mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$, pour un certain $\gamma > 1/3$ (fixé une fois pour toute). Supposons, pour le moment, que l'intégrale contre $g$ est bien définie et qu'elle vérifie les propriétés usuelles qu'on a envie d'avoir à disposition quand on manipule une intégrale. Alors, après avoir noté $(\delta x)_{st} = x_t - x_s$, nous devrions avoir, pour $0 \le s < t \le 1$ :

$$\begin{aligned}
(\delta x)_{st} &= \int_s^t \sigma(x_v) dg_v \\
&= \sigma(x_s)(\delta g)_{st} + \int_s^t \big(\sigma(x_v) - \sigma(x_s)\big) dg_v \\
&= \zeta_s (\delta g)_{st} + r_{st},
\end{aligned}$$

avec $\zeta_s = \sigma(x_s)$ borné et appartenant à $\mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R})$. De plus, on peut raisonnablement supposer que $r_{st} = \int_s^t \big(\sigma(x_v) - \sigma(x_s)\big) dg_v$ appartient lui à $\mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R})$. Réciproquement, soit maintenant $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme

$$(\delta z)_{st} = \zeta_s (\delta g)_{st} + r_{st}, \quad \text{avec } \zeta \in \mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R}) \text{ et } r \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R}).$$

Une telle fonction sera dite *contrôlée* (par $g$) dans la suite. Essayons de définir son intégrale contre $g$. Formellement, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left(\delta\int zdg\right)_{st}=\int_s^t z_v dg_v &= z_s(\delta g)_{st}+\int_s^t(\delta z)_{sv}dg_v\\ &= z_s(\delta g)_{st}+\zeta_s\int_s^t(\delta g)_{sv}dg_v+\int_s^t r_{sv}dg_v\\ &= z_s(\delta g)_{st}+\zeta_s\,\mathbf{g}^{\mathbf{2}}_{st}+\int_s^t r_{sv}dg_v,\end{aligned}$$

avec $\mathbf{g}^{\mathbf{2}}_{st}=\int_s^t(\delta g)_{sv}dg_v$. Ainsi, pour donner un sens à $\int_s^t z_v dg_v$, on voit :

- d'une part qu'on doit savoir donner un sens à l'intégrale $\int_s^t r_{sv}dg_v$. Mais, ceci est en fait aisé car, par hypothèse, on sait que $r\in\mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R})$, que $g\in\mathcal{C}_1^{\gamma}([0,1];\mathbb{R})$ et que $3\gamma>1$. Ainsi, $\int_s^t r_{sv}dg_v$ est une intégrale de type Young et la définir ne pose pas de problème.
- d'autre part, qu'on doit avoir à disposition une *aire de Lévy* $\mathbf{g}^{\mathbf{2}}$ pour $g$.

Résumons notre approche heuristique ci-dessus en formulant un théorème précis. Nous revenons au cas de la dimension quelconque. Tout d'abord, faisons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.** *La fonction $g\in\mathcal{C}_1^{\gamma}([0,1];\mathbb{R}^d)$ admet une aire de Lévy, c'est-à-dire une fonction $\mathbf{g}^{\mathbf{2}}\in\mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R}^{d,d})$ satisfaisant*

$$\delta\mathbf{g}^{\mathbf{2}}=\delta g\otimes\delta g,\quad i.e.\quad \left[(\delta\mathbf{g}^{\mathbf{2}})_{sut}\right](i,j)=[\delta g^i]_{su}[\delta g^j]_{ut},\quad s,u,t\in[0,1],\ i,j\in\{1,\ldots,d\},$$

*où, pour une fonction $\mathbf{h}$ à deux variables, on note $(\delta\mathbf{h})_{sut}=\mathbf{h}_{st}-\mathbf{h}_{su}-\mathbf{h}_{ut}$, tandis que pour une fonction $f$ à une variable, on note $(\delta f)_{st}=f_t-f_s$.*

On peut alors démontrer le résultat suivant (voir [28]) :

**Théorème 3.5.1.** *Soit $g\in\mathcal{C}_1^{\gamma}([0,1];\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant l'Hypothèse 1 avec $\gamma>1/3$. On se donne une valeur initiale $a\in\mathbb{R}^n$, et deux fonctions $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ et $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n,d}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose de plus que $\sigma$ et $b$ sont bornées, ainsi que leurs dérivées. Alors l'équation différentielle*

$$x_t=a+\int_0^t\sigma(x_s)\,dg_s+\int_0^t b(x_s)\,ds,\qquad pour\quad t\in[0,1],\tag{3.5.7}$$

*est bien définie et admet une unique solution dans l'espace des fonctions contrôlées. De plus, l'application $(a,g,\mathbf{g}^{\mathbf{2}})\mapsto x$ est continue de $\mathbb{R}^n\times\mathcal{C}_1^{\gamma}([0,1];\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R}^{d,d})$ dans l'espace des fonctions contrôlées.*

### 3.5.2 Développement asymptotique

Le théorème 3.5.1 s'applique en particulier quand, pour $g$, on choisit une trajectoire d'un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H > 1/3$. Il est alors intéressant d'étudier les propriétés de la solution $X^a$ obtenue.

Dans **[NNRT-14]**, nous nous intéressons au problème suivant. Définissons

$$P_t f(a) = E(f(X_t^a)), \quad \text{pour } t \in [0,1],\ a \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}).$$

Quand la solution est dirigée par un mouvement brownien standard (c'est-à-dire quand $H = 1/2$), on sait que $(P_t)$ est un semi-groupe de Feller et son développement asymptotique (pour $a$ et $f$ fixés) par rapport à $t$ est connu. Quand $H \neq 1/2$, il est naturel de se demander quelles sont les propriétés vérifiées par $(P_t)$. Le premier travail dans cette direction est dû à Baudoin et Coutin. En effet, dans [4], ils étudient le cas de l'équation (3.5.7) *sans dérive*, et donnent un développement asymptotique de $P_t f(a)$ (pour $a$ et $f$ fixés) valable quand $t$ *tend vers zéro*. Avec notre approche, nous traitons le cas avec dérive et en temps $t$ quelconque. De plus, nous codons les coefficients obtenus dans le développement asymptotique à l'aide d'arbres enracinés.

Signalons également, que dans le cas où $H > 1/2$ et $d = 1$, avec Sébastien Darses **[DN-18]** nous avons poussé l'étude précédente plus à fond en utilisant les outils du calcul de Malliavin. Nous renvoyons à la section 4.5 pour plus de détails.

### 3.5.3 Équation différentielle avec retard

Dans **[NNT-24]**, nous illustrons la fléxibilité de l'intégration algébrique en analysant l'existence et l'unicité dans des équations différentielles *avec retard*. À la différence de notre étude précédente (dont le point de départ était le papier de Baudoin et Coutin [4]), il semble ici qu'il soit plus compliqué de mener à bien ce projet en utilisant la théorie classique des trajectoires rugueuses de Lyons. Il faut en effet changer la définition de l'aire de Lévy (et travailler avec des aires de Lévy *retardées*), ce qui est plutôt aisé avec notre formalisme algébrique mais qui semble plus difficile avec l'approche par discrétisation de Lyons.

Plus précisément, nous considérons l'équation suivante : :

$$\begin{cases} x_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(x_s, x_{s-r_1}, \ldots, x_{s-r_k}) dg_s, & t \in [0,1], \\ x_t = \xi_t, \qquad t \in [-r_k, 0]. \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Ici, les retards (discrets) satisfont $r_0 = 0 < r_1 < \ldots < r_k < \infty$, la condition initiale $\xi$ est une fonction de $[-r_k, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\sigma : \mathbb{R}^{n,k+1} \to \mathbb{R}^{n,d}$ est régulière, et la fonction $g$ est supposée appartenir à $\mathcal{C}_1^\gamma([0,1];\mathbb{R}^d)$ (avec $\gamma > 1/3$) et vérifier :

**Hypothèse 2.** *La fonction $g$ admet une aire de Lévy retardée, c'est-à-dire, pour tout $v \in \{-r_k, \ldots, -r_0\}$, une fonction $\mathbf{g^2}(v) \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0,1];\mathbb{R}^{d,d})$ satisfaisant*

$$\delta \mathbf{g^2}(v) = \delta g^v \otimes \delta g,$$

*c'est-à-dire*

$$[(\delta \mathbf{g^2}(v))_{sut}] = [\delta g^i]_{s+v,u+v}[\delta g^j]_{ut}, \quad s,u,t \in [0,1],\ i,j \in \{1,\ldots,d\}.$$

*Dans la formule précédente, on a noté $(\delta \mathbf{h})_{sut} = \mathbf{h}_{st} - \mathbf{h}_{su} - \mathbf{h}_{ut}$ pour une fonction $\mathbf{h}$ à deux variables, $(\delta f)_{st} = f_t - f_s$ pour une fonction $f$ à une variable, et $g^v_s = g_{s+v}$ la trajectoire "shiftée".*

Notre résultat principal est alors comme suit :

**Théorème 3.5.2.** *Soit $g \in \mathcal{C}^\gamma_1([0,1];\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant l'Hypothèse 2 avec $\gamma > 1/3$. On se donne une condition initiale $\xi \in \mathcal{C}^{2\gamma}_1([-r_k,0];\mathbb{R}^n)$, et une fonction $\sigma \in C^3(\mathbb{R}^{n,k+1};\mathbb{R}^{n,d})$. On suppose de plus que $\sigma$ est bornée, ainsi que ses dérivées. Alors l'equation retardée (3.5.8) est bien définie et admet une unique solution dans l'espace des fonctions contrôlées. De plus, l'application $\big(\xi, g, \mathbf{g^2}(-r_k),\ldots,\mathbf{g^2}(-r_0)\big) \mapsto x$ est continue de $\mathcal{C}^{2\gamma}_1([-r_k,0];\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^\gamma_1([0,1];\mathbb{R}^d) \times (\mathcal{C}^{2\gamma}_2([0,1];\mathbb{R}^{d,d}))^{k+1}$ dans l'espace des fonctions contrôlées.*

## 3.6 Quelques perspectives de recherche

(a) Dans la section 3.5.2, nous avons proposé un développement asymptotique de $P_t f(a) = E(f(X^a_t))$ en les puissances fractionnaires de $t$, quand $a$ et $f$ sont fixés. Une problématique assez proche serait de regarder ce qu'on peut dire vis-à-vis de l'erreur (faible) qu'on introduit quand on remplace $E(\phi(X^a_1))$ par $E(\phi(\overline{X}^a_1))$, quand $\overline{X}^a$ désigne un schéma d'approximation (par exemple celui d'Euler) associé à $X^a$. Avec Andreas Neuenkirch et Samy Tindel, nous comptons aborder ce genre de problème dans un futur proche.

(b) À l'heure actuelle, on ne sait construire une aire de Lévy pour le brownien fractionnaire que lorsque son indice de Hurst est strictement supérieur à $1/4$. En effet, depuis le travail de Coutin et Qian [14], personne n'a réussi à faire mieux ! (À ce propos, mentionnons l'article de Feyel et de La Pradelle [22] où la valeur critique $1/4$ est retrouvée comme obstacle à un prolongement analytique, ou encore la prépublication récente de Friz et Victoir [25].) Par ailleurs, nous nous sommes intéressés, dans le premier chapitre de ce mémoire, au mouvement brownien itéré car son comportement est, par certains aspects, très proche de celui du brownien fractionnaire d'indice $1/4$. L'aire de Lévy du mouvement brownien itéré existe-t-elle ? Si on savait répondre par l'affirmative à cette question, on aurait en quelque sorte réussi pour la première fois à franchir la barrière $1/4$ ! À mon avis, la technique employée par Khoshnevisan et Lewis [36] pour construire un calcul stochastique pour le brownien itéré pourrait s'avérer très utile dans cette étude.

# Chapitre 4

# Dérivées stochastiques

## 4.1 Références en jeu

**[DN-13]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Stochastic derivatives for fractional diffusions.* The Annals of Probability **35** (5), 1998-2020.

**[DNP-16]** S. Darses, I. Nourdin et G. Peccati (2007) : *Differentiating $\sigma$-fields for Gaussian and shifted Gaussian processes.* Stochastics, en révision (mineure).

**[DN-18]** S. Darses et I. Nourdin (2007) : *Asymptotic developments at any time for fractional SDEs of Hurst index $H > 1/2$.* Bernoulli, à paraître.

## 4.2 Introduction

Soit $X$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds, \quad t \in [0,1],$$

où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions suffisamment bornées et régulières, et où $B$ est un mouvement brownien standard. Notons $\mathscr{P}_t^X$ la tribu engendrée par $\{X_s,\, s \in [0,t]\}$. Il est bien connu que la quantité

$$\frac{1}{h}\,\mathrm{E}\left[f(X_{t+h}) - f(X_t)|\mathscr{P}_t^X\right] \tag{4.2.1}$$

converge (en probabilité et quand $h \downarrow 0$) pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière et bornée. Ce résultat d'existence est la clé pour définir un des opérateurs centraux dans la théorie des processus de diffusion, à savoir le *générateur infinitésimal* $\mathscr{L}$ de $X$ donné par :

$$\mathscr{L}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x)^2 f''(x).$$

Notons que la quantité dans (4.2.1) est prise conditionnellement au passé de $X$ avant $t$. Toutefois, vu la propriété de Markov forte vérifiée par $X$, on aurait pu tout aussi bien remplacer $\mathscr{P}_t^X$ par le présent de $X$ en $t$, c'est-à-dire la tribu $\sigma\{X_t\}$ engendrée par $X_t$. D'autre part, si on choisit $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ dans (4.2.1), alors la limite existe sous des conditions faibles sur $b$ et $\sigma$, et coincide avec la notion de "vitesse moyenne" de $X$ en $t$ (nous renvoyons à la célèbre *théorie dynamique des diffusions browniennes* de Nelson [46] pour des résultats plus précis dans cette direction – voir aussi le récent survol par Carlen [9]).

Maintenant, intéressons-nous à la question suivante : est-il possible d'obtenir l'existence, et d'étudier la nature, d'une limite analogue à (4.2.1) quand $X$ n'est plus un processus de Markov ou une semimartingale ? Dans la suite, nous allons en fait principalement nous focaliser sur le cas où $X$ est un processus gaussien (éventuellement avec une dérive) et $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (l'investigation du cas où $X$ n'est pas gaussien avec dérive fait partie de nos projets futurs). Pour mieux apprécier la subtilité du problème, décrivons un exemple. Considérons un mouvement brownien fractionnaire $B$ d'indice de Hurst $H > 1/2$ (on rappelle que $B$ n'est ni un processus de Markov, ni une semimartingale). Il est immédiat, par régression linéaire, que la quantité

$$\frac{1}{h}\,\mathrm{E}[B_{t+h} - B_t | B_t]$$

converge dans $L^2$ (quand $h \downarrow 0$). À l'opposé, la quantité

$$\frac{1}{h}\mathrm{E}[B_{t+h} - B_t | \mathscr{P}_t^B]$$

n'admet même pas de limite en probabilité. Ce fait, troublant, a été remarqué la première fois par Darses et Saussereau [15], et est le point de départ des travaux **[DN-13]** et **[DNP-16]**, que nous allons détailler maintenant.

## 4.3 Quelques définitions

Avant toute chose, nous devons déjà poser un certain nombre de définitions. Dans toute la suite, $Z$ désigne un processus défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et qui vérifie en outre que $Z_t \in L^2$ pour tout $t$.

**Définition 4.3.1.** *On dira qu'une tribu $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ dérive (ou est dérivante pour) $Z$ en $t$ si le taux d'accroissement*

$$\frac{1}{h}\,\mathrm{E}\left[Z_{t+h} - Z_t | \mathscr{G}\right] \tag{4.3.2}$$

*converge dans $L^2$, quand $h$ tend vers 0. Quand elle existe, la limite est alors notée $D^{\mathscr{G}} Z_t$, et est appelée la dérivée stochastique de $Z$ en $t$ par rapport à $\mathscr{G}$.*

En général, la tribu initiale $\mathscr{F}$ n'est pas dérivante (elle l'est, grosso modo, si et seulement si les trajectoires de $Z$ sont dérivables) mais la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$ l'est (elle l'est si et seulement si $t \mapsto E(Z_t)$ est dérivable). Qu'en est-il entre les deux ? Quand une sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ n'est pas dérivante, on peut imaginer (au moins) deux stratégies pour forcer la quantité (4.3.2) à converger : soit on remplace $\mathscr{G}$ par un tribu encore plus petite $\mathscr{H}$, soit on remplace $1/h$ par $1/h^{\alpha}$ pour un certain $0 < \alpha < 1$. L'inconvénient de la seconde stratégie est qu'on perd l'interprétation physique de notre dérivée stochastique, à savoir qu'elle est définie comme la limite d'un taux d'accroissement (et représente donc une notion de vitesse). Nous allons toutefois voir qu'on ne peut pas toujours s'en passer, car il se peut que la première stratégie soit toujours en défaut (voir plus loin le cas du brownien fractionnaire d'indice $H < 1/2$, et plus particulièrement la proposition 4.4.2). D'autre part, l'inconvénient de la première stratégie est qu'à trop appauvrir $\mathscr{G}$, il se peut qu'on obtienne quelque chose de dégénéré à la limite. C'est pourquoi on pose la :

**Définition 4.3.2.** *On dira qu'une tribu $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ dégénère $Z$ en $t$ si $\mathscr{G}$ dérive $Z$ en $t$ avec $\mathrm{Var}(D^{\mathscr{G}} Z_t) = 0$. On dira qu'une tribu $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ ne dérive vraiment pas $Z$ en $t$ si $\mathscr{G}$ ne dérive pas $Z$ en $t$ et si de plus, pour toute sous-tribu $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$, soit $\mathscr{H}$ ne dérive pas $Z$ en $t$, soit $\mathscr{H}$ dégénère $Z$ en $t$.*

On a donc défini, en quelque sorte, trois "régimes" possibles pour une sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ vis-à-vis de $Z$ en $t$ : soit '*pas dérivante*', soit '*dérivante*', soit '*dégénérée*' (le dernier 'soit' n'est pas exclusif !). Pour la plupart des processus qu'on a l'habitude de manipuler, il se passe typiquement la chose suivante : la tribu pleine $\mathscr{F}$ n'est pas dérivante ; en l'affaiblissant, on espère tomber sur une tribu dérivante, disons $\mathscr{G}$ (ce n'est pas toujours possible, voir plus loin) ; mais si on l'affaiblit trop, on peut tomber sur une tribu dégénérée (le cas le plus mauvais étant $\{\emptyset, \Omega\}$). Un lien entre ces trois régimes est le suivant :

**Lemme 4.3.3.** *(projection) Si $\mathscr{G}$ dérive $Z$ en $t$ et si $\mathscr{H}$ est une sous-tribu de $\mathscr{G}$ alors $\mathscr{H}$ dérive $Z$ en $t$ et*

$$D^{\mathscr{H}} Z_t = E[D^{\mathscr{G}} Z_t \,|\, \mathscr{H}].$$

Nous allons maintenant détailler des exemples, principalement construits à l'aide du mouvement brownien fractionnaire.

## 4.4 Dérivées stochastiques et changement de probabilité

Dans toute cette section, on considère un processus $Z$ et une sous-tribu $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ qui dérive $Z$ en un temps $t$ fixé. Nous aimerions, pour une classe suffisamment large de $Z$ et de $\mathscr{G}$, donner des conditions qui assurent que $\mathscr{G}$ dérive encore $Z$ après un changement de probabilité équivalente (phénomène d'invariance). En fait, nous allons nous contenter dans cette section d'étudier la dérivée stochastique d'un processus *gaussien* avec dérive, en commençant par éliminer cette dernière à l'aide du transformation de type Girsanov. De plus, nous nous concentrerons dans la suite sur les tribus engendrées par *une seule* variable aléatoire.

À partir de maintenant, on suppose que $Z = (Z_t)_{t \in [0,T]}$ est un processus stochastique défini sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose aussi que, sous une probabilité équivalente $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, le processus $Z$ est un processus gaussien centré (en particulier, on a automatiquement que $Z_t \in \mathrm{L}^2(\mathbb{P}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{Q})$ pour tout $t$). Notons $\mathcal{H}_1(Z, \mathbb{Q}) = \{Z(h), h \in \mathfrak{H}\}$ le premier chaos de Wiener associé à $Z$ sous $\mathbb{Q}$ (ce qui signifie que la fermeture est vis-à-vis de la norme sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{Q})$), représenté canoniquement comme un processus gaussien isonormal par rapport à un espace de Hilbert séparable $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{H}})$. En particulier : (i) l'espace $\mathfrak{H}$ contient l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions étagées sur $[0,T]$, (ii) la fonction de covariance de $Z$ sous $\mathbb{Q}$ est donnée par $\rho_{\mathbb{Q}}(s,t) = \langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]}\rangle_{\mathfrak{H}}$, et (iii) le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{H}}$ vérifie la relation générale :

$$\forall\, h,h' \in \mathfrak{H}, \quad \langle h,h'\rangle_{\mathfrak{H}} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}[Z(h)Z(h')].$$

Enfin, notons simplement par $D$ la dérivée de Malliavin associée au processus $Z$ sous $\mathbb{Q}$. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.4.1.** *Fixons $t \in (0,T)$, et choisissons $g \in \mathfrak{H}$ tel que $\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, g\rangle_{\mathfrak{H}} \neq 0$. Écrivons $\eta$ pour indiquer la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ (c'est-à-dire $d\mathbb{Q} = \eta\, d\mathbb{P}$), et supposons que $\eta$ est de la forme $\eta = c\exp(-\zeta)$, pour une certaine variable aléatoire $\zeta$ pour laquelle $D\zeta$ existe. Supposons enfin que*

$$\mu_t \triangleq \lim_{h\to 0} h^{-1}\langle \mathbf{1}_{[t,t+h]}, D\zeta\rangle_{\mathfrak{H}} \quad \text{existe dans } \mathrm{L}^2.$$

*Alors $\sigma\{Z(g)\}$, la tribu engendrée par $Z(g)$, dérive $Z$ en $t$ sous $\mathbb{P}$ si et seulement si elle dérive $Z$ en $t$ sous $\mathbb{Q}$.*

*De plus,*

1. *dans ce cas, on a*

$$D_{\mathbb{P}}^{\sigma\{Z(g)\}} Z_t = \frac{|g|_{\mathfrak{H}}^2 \ \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[Z_t - \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, D\zeta\rangle_{\mathfrak{H}} | Z(g)]}{Z(g)\ \langle g, \mathbf{1}_{[0,t]}\rangle_{\mathfrak{H}}}\ D_{\mathbb{Q}}^{\sigma\{Z(g)\}} Z_t + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\mu_t | Z(g)].$$

2. *sinon, on a que $\mathscr{H} \subset \sigma\{Z(g)\}$ dérive $Z$ en $t$ par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[Z_t - \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, D\zeta\rangle_{\mathfrak{H}} | \mathscr{H}] = 0.$$

*Dans ce cas, $D_{\mathbb{P}}^{\mathscr{H}} Z_t = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\mu_t|\mathscr{H}]$.*

Comme application de ce théorème, regardons le cas particulier du brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$. Plus précisément, soit $\Upsilon_H$ l'ensemble des browniens fractionnaires avec dérive $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ de la forme

$$Z_t = x_0 + B_t + \int_0^t b_s ds, \quad t \in [0,T], \tag{4.4.3}$$

où $b$ parcourt l'ensemble des processus adaptés (pour la filtration naturelle de $B$) ayant des trajectoires intégrables.

On a alors :

**Proposition 4.4.2.** *Soient $Z \in \Upsilon_H$ et $s,t \in (0,T)$.*

1. *Si $H > 1/2$ alors $\sigma\{Z_s\}$ dérive $Z$ en $t$.*
2. *Si $H < 1/2$ alors $\sigma\{Z_s\}$ ne dérive vraiment pas $Z$ en $t$. Toutefois, on a que*

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-2H}\mathrm{E}[Z_{t+h} - Z_t | Z_s] \text{ existe dans } \mathrm{L}^2.$$

## 4.5 Développement asymptotique

Soit $Z$ un processus de la forme (4.4.3). Quand $H > 1/2$, une conséquence de la proposition 4.4.2 juste ci-dessus (en choisissant $s = t$) est que la quantité

$$\frac{1}{h}\,\mathrm{E}[Z_{t+h} - Z_t \,|\, Z_t]$$

converge dans $L^2$ (quand $h \downarrow 0$). Peut-on dire mieux et même donner un développement asymptotique, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière, de

$$\mathrm{E}[f(Z_{t+h}) - f(Z_t) \,|\, Z_t]?$$

(voir aussi (4.2.1))

Dans **[DN-18]**, qui est un travail en collaboration avec Sébastien Darses, nous répondons par l'affirmative à cette question. Précisément, à l'aide des outils du calcul de Malliavin et en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans **[DN-13]**, nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 4.5.1.** *Soient un temps $t > 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ bornée ainsi que toutes ses dérivées. Notons $\mathcal{N}$ pour $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour $(p,q) \in \mathcal{N}$, posons*

$$J_{2pH+q} = \{(m,n) \in \mathcal{N} :\ 2mH + n \leq 2pH + q\}.$$

*Alors il existe une famille $\{Z_{2mH+n}\}_{(m,n)\in\mathcal{N}}$ de variables aléatoires mesurables par rapport à $X_t$ telles que, pour tout $(p,q) \in \mathcal{N}$ :*

$$\mathrm{E}[f(Z_{t+h}) - f(Z_t) \,|\, Z_t] = \sum_{(m,n)\in J_{2pH+q}} Z_{2mH+n}\, h^{2mH+n} + o(h^{2pH+q}).$$

Remarquons que le cas où $t = 0$ a déjà été traité dans la section 3.5.2, dans le cas plus général où $H > 1/3$ et en dimension quelconque. D'autre part, le premier terme dans ce développement asymptotique est évidemment le terme $f'(Z_t)\, D^{\sigma\{Z_t\}} Z_t\, h$, où $D^{\sigma\{Z_t\}} Z_t$ désigne la dérivée stochastique de $Z$ en $t$ par rapport à son présent $\sigma\{Z_t\}$.

## 4.6 Quelques perspectives de recherche

Dans les sections 4.4 et 4.5, nous avons choisi de travailler exclusivement avec des processus gaussiens avec dérive. Mais il existe d'autres familles de processus qui pourraient être intéressante à regarder, et que l'on pourrait sans doute traiter avec des méthodes similaires. Par exemple, que peut-on dire quand, à la place de $Z$ défini par (4.4.3), on choisit $Z_t = \delta(u\mathbf{1}_{[0,t]})$ pour $u$ un processus vérifiant des conditions adéquates, et où $\delta$ désigne l'intégrale de Skorohod par rapport à un processus gaussien donné ? Plus généralement, peut-on énoncer un principe d'invariance dans un cadre non gaussien et/ou pour des tribus plus générales que celles engendrées par une seule (en fait un nombre fini de) variable(s) aléatoire(s), comme dans la section 4.4 ?

# Bibliographie


[1] E. Alòs, O. Mazet et D. Nualart (2001) : *Stochastic calculus with respect to Gaussian processes.* Ann. Probab. **29**, 766-801.

[2] P. Baldi, G. Kerkyacharian, D. Marinucci et D. Picard (2007) : *Subsampling Spherical Needlets.* Preprint.

[3] O.E. Barndorff-Nielsen, J.M. Corcuera et M. Podolskij (2007) : *Power variation for Gaussian processes with stationary increments.* Preprint.

[4] F. Baudoin et L. Coutin (2007) : *Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions.* Stoch. Proc. Appl. **117** (5), 550-574.

[5] F.E. Benth (2003) : *On arbitrage-free pricing of weather derivatives based on fractional Brownian motion.* Appl. Math. Finance **10**, 303-324.

[6] D. Brody, J. Syroka et M. Zervos (2002) : *Dynamical pricing of weather derivatives.* Quantitative Finance **2**, 189-198.

[7] P. Breuer et P. Major (1983) : *Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields.* J. Multivar. Anal. **13**, 425-441.

[8] K. Burdzy (1993) : *Some path properties of iterated Brownian motion.* In Seminar on Stochastic Processes (E. Cinlar, K.L. Chung and M.J. Sharpe, eds.), Birkhaüser, Boston, 67-87.

[9] E. Carlen (2006) : *Stochastic mechanics : a look back and a look ahead.* In : Diffusion, Quantum Theory and Radically Elementary Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 117-139.

[10] S. Chatterjee (2007) : *A new method of normal approximation.* Ann. Probab., to appear.

[11] S. Chatterjee (2007) : *Fluctuation of eigenvalues and second order Poincaré inequalities.* Probab. Theory Relat. Fields, to appear.

[12] L. Chen and Q.-M. Shao (2005) : *Stein's method for normal approximation.* In : An introduction to Stein's method, 1-59. Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap. **4**, Singapore Univ. Press, Singapore.

[13] J.M. Corcuera, D. Nualart et J.H.C. Woerner (2006) : *Power variation of some integral long-memory processes.* Bernoulli **12**, 713-735.

[14] L. Coutin et Z. Qian (2002) : *Stochastic rough path analysis and fractional Brownian motion.* Probab. Theory Relat. Fields **122**, 108-140.

[15] S. Darses et B. Saussereau (2007) : *Time reversal for drifted fractional Brownian Motion with Hurst index $H > 1/2$.* Electron. J. Probab. **12**, 1181-1211 (electronic).

[16] P. Deheuvels, G. Peccati et M. Yor (2006) : *On quadratic functionals of the Brownian sheet and related processes.* Stoch. Proc. Appl. **116**, 493-538.

[17] L. Denis (2004) : *Solutions of stochastic partial differential equations considered as Dirichlet processes.* Bernoulli **10** (5), 783-827.

[18] G. Denk, D. Meintrup et S. Scheffler (2001) : *Transient noise simulation : Modeling and simulation of $1/f$-noise.* In : Antreich, K. (ed.) et al., Modeling, simulation, and optimization of integrated circuits. Birkhäuser. ISNM, Int. Ser. Numer. Math. **146**, 251-267.

[19] R.L. Dobrushin et P. Major (1979) : *Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields.* Z. Wahrsch. verw. Geb. **50**, 27-52.

[20] H. Doss (1977) : *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires.* Ann. Inst. H. Poincaré **13**, 99-125.

[21] N. El Karoui, D. Huu Nguyen et M. Jeanblanc-Picqué (1987) : *Compactification Methods in the Control of Degenerate Diffusions : Existence of an Optimal Control,* Stochastics **20**, 169-219.

[22] D. Feyel et A. de La Pradelle (2006) : *Curvilinear integrals along enriched paths.* Electron. J. Probab. **11**, 860-892.

[23] W.H. Fleming (1978) : *Generalized solutions in optimal stochastic control,* Differential Games and Control Theory, Kingston Conference 2, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **30**, Dekker.

[24] R. Fox et M. Taqqu (1987) : *Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence.* Probab. Th. Rel. Fields **74**, no. 2, 213-240.

[25] P. Friz et N. Victoir (2007) : *Differential equations driven by Gaussian signals I.* Ann. Inst. H. Poincaré, to appear.

[26] A. Ghouila-Houri (1967) : *Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable.* RIRO **4**, 7-32.

[27] L. Giraitis et D. Surgailis (1985) : *CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes.* Z. Wahrsch. verw. Geb. **70**, 191-212.

[28] M. Gubinelli (2004) : *Controlling rough paths.* J. Funct. Anal. **216**, 86-140.

[29] T. Hida, H. Kuo, J. Pothoff et L. Streit (1993) : *White Noise, an Infinite Dimensional Calculus.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[30] C. Houdré (1998) : *Comparison and deviation from a representation formula.* Stochastic processes and related topics, 207-218, Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[31] C. Houdré, V. Pérez-Abreu et D. Surgailis (1998) : *Interpolation, correlation identities, and inequalities for infinitely divisible variables.* J. Fourier Anal. Appl. **4**, no. 6, 651-668.

[32] Y. Hu et D. Nualart (2005) : *Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion.* Ann. Probab. **33** (3), 948-983.

[33] J. Jacod (1994) : *Limit of random measures associated with the increments of a Brownian semimartingale.* Preprint Paris VI (revised version).

[34] C. Jost (2006) : *Transformation formulas for fractional Brownian motion.* Stoch. Proc. Appl. **116**, no. 10, 1341-1357.

[35] H. Kesten et F. Spitzer (1979) : *A limit theorem related to a new class of self-similar process.* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **50**, 327-340.

[36] D. Khoshnevisan et T.M. Lewis (1999) : *Stochastic calculus for Brownian motion on a Brownian fracture.* Ann. Appl. Probab. **9** (3), 629-667.

[37] S.C. Kou et X. Sunney Xie (2004) : *Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise : Subdiffusion within a Single Protein Molecule.* Phys. Rev. Lett. **93** (18).

[38] T.G. Kurtz et P. Protter (1991) : *Wong-Zakai corrections, random evolutions and simulation schemes for SDEs.* Stochastic analysis, Academic Press, Boston, MA, 331-346.

[39] J. Lamperti (1962) : *On convergence of stochastic processes.* American Mathemat. Society Transact. **104**, 430-435.

[40] A. Lanconelli (2007) : *On a new version of the Itô's formula for the stochastic heat equation.* Preprint ArXiv.

[41] J. León et C. Ludeña (2006) : *Limits for weighted $p$-variations and likewise functionals of fractional diffusions with drift.* Stoch. Proc. Appl. **117** (3), 271-296.

[42] T. Lyons (1998) : *Differential equations driven by rough signals.* Rev. Mat. Iberoamericana **14** (2), 215-310.

[43] D. Marinucci et G. Peccati (2007) : *High-frequency asymptotics for subordinated stationary fields on an Abelian compact group.* Stoch. Proc. Appl. **118** (4), 585-613.

[44] D. Marinucci et G. Peccati (2007) : *Group representations and high-resolution central limit theorems for subordinated spherical random fields.* Preprint.

[45] Y. Mishura et G. Shevchenko (2007) : *The rate of convergence of Euler approximations for solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion.* Preprint ArXiv.

[46] E. Nelson (1966) : Dynamical theory of Brownian motion. Princeton University Press.

[47] D. Nualart (2003) : *Stochastic calculus with respect to the fractional Brownian motion and applications.* Contemporary Mathematics **336**, 3-39.

[48] D. Nualart (2006) : The Malliavin calculus and related topics. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition.

[49] D. Nualart et S. Ortiz-Latorre (2007) : *Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus.* Stoch. Proc. Appl. **118** (4), 614-628.

[50] D. Nualart et G. Peccati (2005) : *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals.* Ann. Probab. **33** (1), 177-193.

[51] G. Peccati (2007) : *Gaussian approximations of multiple integrals.* Electron. Comm. Probab. **12**, 350-364 (electronic).

[52] G. Peccati et M.S. Taqqu (2006) : *Stable convergence of multiple Wiener-Itô integrals.* J. Theoret. Probab., to appear.

[53] G. Peccati et M.S. Taqqu (2007) : *Stable convergence of generalized $L^2$ stochastic integrals and the principle of conditioning.* Electron. J. Probab. **12**, no. 15, 447-480 (electronic).

[54] G. Peccati et C.A. Tudor (2004) : *Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals.* Séminaire de Probabilités **XXXIII**, Lecture Notes in Mathematics, 247-262.

[55] G. Reinert (2005) : *Three general approaches to Stein's method.* In : An introduction to Stein's method, 183-221. Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap. **4**, Singapore Univ. Press, Singapore.

[56] Y. Rinott and V. Rotar (2000) : *Normal approximation by Stein's method.* Decisions in Economics and Finance **23**, 15-29.

[57] F. Russo et P. Vallois (1993) : *Forward, backward and symmetric stochastic integration.* Probab. Theory Relat. Fields **97**, 403-421.

[58] Ch. Stein (1972) : *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables.* In : Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II : Probability theory, 583-602. Univ. California Press, Berkeley, Calif.

[59] Ch. Stein (1986) : *Approximate computation of expectations.* Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series, **7**. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

[60] H.J. Sussmann (1977) : *An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on a sample point.* Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 296-298.

[61] J. Swanson (2007) : *Variations of the solution to a stochastic heat equation.* Ann. Probab. **35**, no. 6, 2122-2159.

[62] M.S. Taqqu (1975) : *Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process.* Z. Wahrsch. verw. Geb. **31**, 287-302.

[63] M.S. Taqqu (1977) : *Law ot the iterated logarithm for sums of non-linear functions of Gaussian variables that exhibit a long range dependence.* Z. Wahrsch. verw. Geb. **40**, 203-238.

[64] M.S. Taqqu (1979) : *Convergence of integrated processes to arbitrary Hermite rank.* Z. Wahrsch. verw. Geb. **50**, 53-83.

[65] C.A. Tudor and F. Viens (2007) : *Variations and estimators for the selfsimilarity order through Malliavin calculus.* Preprint.

[66] Young L.C. (1969) : *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* W. B. Saunders Co., Philadelphia-London-Toronto, Ont., 331 pages.

[67] L. Zambotti (2006) : *Itô-Tanaka's formula for stochastic partial differential equations driven by additive space-time white noise.* SPDEs and applications VII, Lect. Notes Pure Appl. Math. **245**, Boca Raton, 337-347.